

Campos conservativos

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

11 de enero de 2023

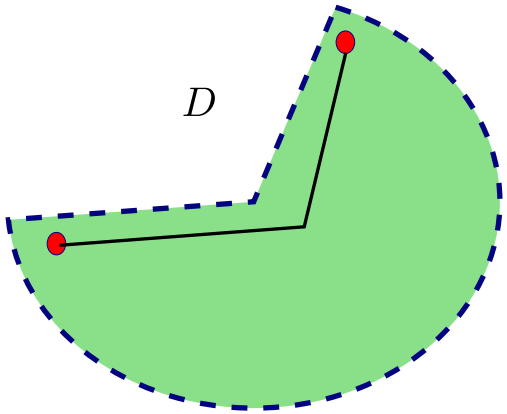
Campos conservativos

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

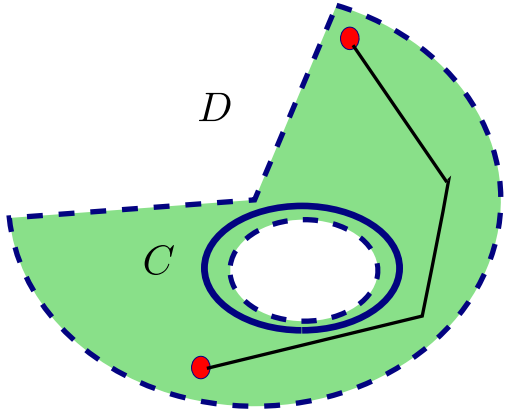
Definición.

1. Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice **conexo** si todo par de puntos de D se pueden unir con una curva regular a trozos contenida en D. Es decir, D es de "una sola pieza".
2. Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo se dice **simplemente conexo** si toda curva cerrada simple C en D, encierra una región que está también en D. Es decir, los conjuntos simplemente conexos no tienen "agujeros".
3. Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice **convexo** si para todo par de puntos A, $B \in D$, el segmento de recta que une A con B está contenido en D, es decir, $\{(1-t)A + tB \ : t \in [0,1]\} \subset D$.

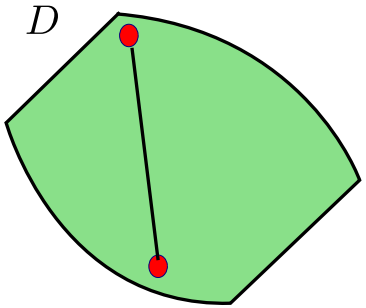
Campos conservativos



D es simplemente conexo, pero no convexo



D es conexo pero no simplemente conexo



D es convexo

Campos conservativos

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Sea $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial definido sobre un conjunto abierto D. Diremos que $\mathbf{F}$ es **conservativo** en D si existe una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que

$$\nabla f = \mathbf{F}\,.$$

En este caso, se dice que f es una **función potencial** de $\mathbf{F}$.

Si D es conexo y $\mathbf{F}$ conservativo, las funciones potenciales de $\mathbf{F}$ son iguales salvo por constantes. También se puede probar que si $\mathbf{F} = (P, Q)$ y $P_y \neq Q_x$, entonces $\mathbf{F}$ no es conservativo (no tiene función potencial).

Campos conservativos

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema. (Test de derivadas mixtas)

1. Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ de clase C^1 definida en un conjunto simplemente conexo D del plano. Entonces, F es conservativo si y solo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

2. Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un conjunto simplemente conexo D del espacio. Entonces, $\mathbf{F}$ es conservativo si y solo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}\,.$$

Campos conservativos

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema. (Teorema Fundamental para integrales de línea)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 donde D es conexo y abierto. Sea C una curva regular a trozos en D parametrizada por $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\int_C \nabla f \cdot d\alpha = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) \,.$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_C \nabla f \cdot d\alpha &= \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\, dt \\
&= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))\,.
\end{aligned}$$

Campos conservativos

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. La integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$ es independiente de la trayectoria si

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\alpha = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\alpha$$

para cualquier trayectoria C_1 y C_2 en D que tienen los mismos puntos iniciales y finales.

Campos conservativos

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teorema.

Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una campo de vectores continuo con D conexo. Entonces, $\int_\Gamma F \cdot d\alpha$ es independiente de la trayectoria en D si y solo $\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = 0$ para toda curva $C \subset D$ cerrada.

Campos conservativos

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

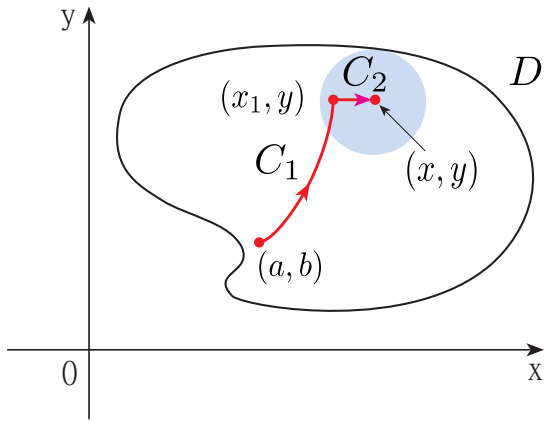
Teorema.

Sea $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo con D abierto conexo. Si $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$ es independiente de la trayectoria en D entonces $\mathbf{F}$ es un campo conservativo en D.

Campos conservativos

Demostración. Sea (a, b) un punto fijo en D. Construimos la función potencial

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} F \cdot d\alpha \, .$$



Tenemos que

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\alpha + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\alpha = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\alpha + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\alpha$$

Campos conservativos

Entonces, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\alpha$$

Si $\mathbf{F} = (P, Q)$ entonces

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\alpha = \int_{C_2} P dx + Q dy$$

Note que sobre C_2, y es constante entonces $dy = 0$. Se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{P} dx + Q dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} P(t,y)\, dt = P(x,y)\,.$$

Campos conservativos

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Considere las siguientes afirmaciones

1. $\mathbf{F}$ es conservativo en D.
2. $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$ es independiente de la trayectoria.
3. $\displaystyle\oint_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = 0$
4. $\mathbf{F} = (P, Q)$ se cumple que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

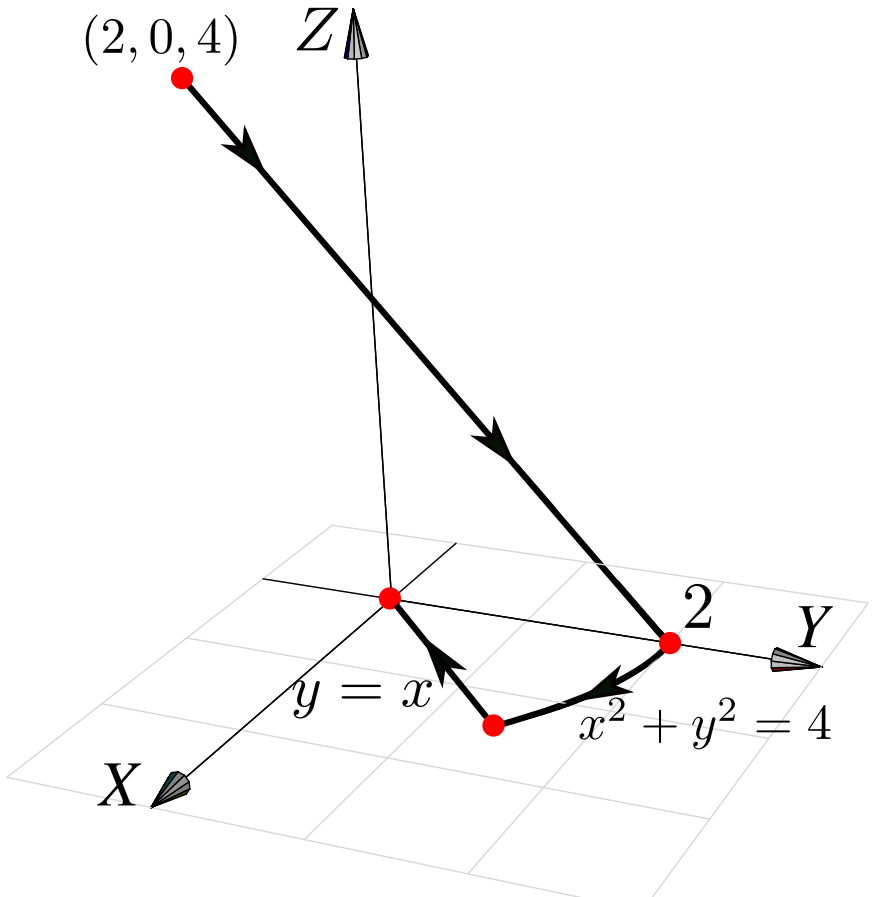
Realice un esquema con las afirmaciones equivalentes.

Campos conservativos

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2x\ln(yz) - 5ye^x, \frac{x^2}{y} - 5e^x, \frac{x^2}{z} + 2z\right)$ y C una curva simple que une $A = (2,2,1)$ con $B(3,1,e)$. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$.

Campos conservativos

EJEMPLO 2 Considere el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xe^z\mathbf{i} + \cos(y)\mathbf{j} + 2x^2e^z\mathbf{k}$. Sea C la curva de la figura. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$.



Campos conservativos

EJEMPLO 3 Sea $\mathbf{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
Se verifica que $P_y = Q_x$ y además

$$\int_C \mathbf{F} \cdot dr = 2\pi$$

si C es la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. ¿Esto no contradice los teoremas antes vistos?