MAT–1630 - CALCULO III
Pauta de Corrección Examen
Segundo Semestre 2018

1. Considere la curva γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (e^t, \operatorname{sen}(e^t - 1), \cos(e^t - 1)), \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

a) Determine una parametrización $\phi(s)$ por longitud de arco de γ con $\phi(0) = (1, 0, 1)$.

b) Calcule la ecuación del plano osculador a γ en $(1, 0, 1)$.

Solución.

a) La parametrización $\vec{r}(t)$ tiene derivada

$$\dot{\vec{r}}(t) = e^t(1, \cos(e^t - 1), -\operatorname{sen}(e^t - 1)) \qquad \boxed{\text{Calcula derivada (**0,5 pto**)}}$$

$$\Longrightarrow \qquad \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{2}\, e^t \qquad \boxed{\text{Calcula longitud (**0,5 pto**)}}$$

Si $\vec{\phi}(s)$ es una parametrización por longitud de arco tal que $\vec{\phi}(0) = \vec{r}(0)$, entonces $s(0) = 0$ obteniendo así que:

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{r}}(u)\|\, du = \sqrt{2}\,(e^t - 1) \qquad \boxed{\text{Calcula } s(t) \text{ (**0,5 pto**)}}$$

$$\Longrightarrow \qquad t = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \qquad \boxed{\text{Calcula } t(s) \text{ (**0,5 pto**)}}$$

Por lo tanto la parametrización por longitud de arco pedida es:

$$\vec{\phi}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1, \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) \qquad \boxed{\text{Explicita } \phi(s) \text{ (**1,0 pto**)}}$$

b) El vector normal que genera el plano osculador es la binormal que corresponde a $\mathbf{b} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ donde $T = \dot{\phi}(s)$ y $\mathbf{N}$ es el vector unitario $\mathbf{N} = \frac{1}{\|\ddot{\phi}(s)\|}\ddot{\phi}(s)$.

Calculando

$$\dot{\vec{\phi}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1, \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)$$

$$\ddot{\vec{\phi}}(s) = \frac{1}{2}\left(0, -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad 2\ddot{\vec{\phi}}(s) = \mathbf{N} \qquad \boxed{\text{Calcula } \mathbf{N} \text{ (**1,0 pto**)}}$$

El vector binormal en $s = 0$ es $\mathbf{b}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0) = \dot{\vec{\phi}}(0) \times 2\ddot{\vec{\phi}}(0)$

$$\vec{b}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1, \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0) \qquad \boxed{\text{Calcula } \mathbf{b}(0) \text{ (**1.0 pto**)}}$$

Donde se concluye que el plano osculador es

$$((x-1), (y-0), (z-1)) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Longrightarrow y - x + 1 = 0\,. \qquad \boxed{\text{Explicita ecuación del plano (**1,0 pto**)}}$$

2. Considere γ la curva en $\mathbb{R}^3$ generada por la intersección de las superficies

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x,y,z)=(y,z,x)$.

Solución.

Sea R la región del plano $x-y+z=0$ que es tapa de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$.

Explicita frontera (**0,5 pto**)

La normal del plano es $\mathbf{N}=(1,-1,1)$. Calcula normal a R frontera (**0,5 pto**)

El rotor del campo $\vec{F}$ está dado por

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{F} &= \left[(\partial_y F_3-\partial_z F_2 \quad , \quad \partial_z F_1-\partial_x F_3 \quad , \quad \partial_x F_2-\partial_y F_1\right] \\ &= (-1,-1,-1) \end{aligned}$$

Calcula rotor (**1,0 pto**)

con $F_1,F_2,F_3)=(y,z,x)$.
Usando el teorema de Stokes tendremos que

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F\cdot d\mathbf{x} &= \int_S (\nabla\times F)\cdot N\, dS \\ &= \int_S (-1,-1,-1)\cdot(1,-1,1)\, dS \end{aligned}$$

Aplica Stokes (**1,5 pto**)

Por lo tanto,

$$\int_\Gamma F\cdot d\mathbf{x} = -(\text{área de } S)$$

Expresa igualdad (**1,0 pto**)

Puesto que el plano pasa por el origen, la intersección de la esfera con el plano es un círculo de radio 1 cuya área es π.

Reconoce la intersección (**0,5 pto**)

Resumiendo,

$$\int_\Gamma F\cdot d\mathbf{x} = -\pi\,.$$

Explicita solución (**1,0 pto**)

3. Considere la curva espiral Γ en el plano $\mathbb{R}^2$ con parametrización $\vec{r}(t) = (\ e^t \cos t,\ e^t \sin t\ )$, $0 \leq t \leq 3\pi$ y el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \left(3x^2 \sin(y^2) + 2x\ ,\ 2x^3 y \cos(y^2) + 1\right).$$

a) Calcule el largo de la curva Γ.

b) Calcule $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solución. Parte (a)

Para calcular el elemento de longitud de arco calculamos primero

$$\vec{r}\,'(t) = (e^t \cos(t) - e^t \sin(t), e^t \sin(t) + e^t \cos(t)) \quad \boxed{\text{Calcula velocidad (}\mathbf{0{,}5\ pto}\text{)}}$$

y su longitud

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(e^t \cos(t) - e^t \sin(t))^2 + (e^t \sin(t) + e^t \cos(t))^2} = \sqrt{2}\, e^t\,. \boxed{\text{Calcula longitud velocidad (}\mathbf{0{,}5\ pto}\text{)}}$$

Luego, el largo $\mathcal{L}(\Gamma)$ de la curva Γ es

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_0^{3\pi} \sqrt{2}\, e^t\, dt = \sqrt{2}(e^{3\pi} - 1)\,. \qquad \boxed{\text{Calcula longitud de curva(}\mathbf{1{,}0\ pto}\text{)}}$$

Solución. Parte (b)

El campo $\vec{F}$ está bien definido y es de clase C^1 en todo el plano. $\boxed{\text{Explicita suavidad (}\mathbf{0{,}5\ pto}\text{)}}$

Además cumple que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2 y \cos(y^2) = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \boxed{\text{Verifica condición (}\mathbf{0{,}5\ pto}\text{)}}$$

Por lo que $\vec{F}$ es conservativo en todo el plano. $\boxed{\text{Prueba que es conservativo(}\mathbf{0{,}5\ pto}\text{)}}$

Aplicamos Teorema Fundamental del Cálculo. Para esto buscamos primero el potencial V del campo vectorial $\vec{F}$.

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = 3x^2 \sin(y^2) + 2x$$

de donde $V(x,y) = x^3 \sin(y^2) + x^2 + g(y)$. Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = 2x^3 y \cos(y^2) + 1$$

Es decir, $V(x,y) = x^3 \sin(y^2) + y + h(x)$.

Por lo tanto, $V(x,y) = x^3 \sin(y^2) + x^2 + y$. $\boxed{\text{Calcula el potencial(}\mathbf{1{,}5\ pto}\text{)}}$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo vemos que

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c \nabla V \cdot d\vec{r} = V(r(3\pi)) - V(r(0)) = V(-e^{3\pi}, 0) - V(1,0) = e^{6\pi} - 1\,.$$

$\boxed{\text{Calcula la integral(}\mathbf{1{,}0\ pto}\text{)}}$

4. Llamemos S a la superficie en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2+y^2+z^2=4\,,\ z\geq 0$. Se define el campo en $\mathbb{R}^3$ por

$$\vec{F}(x,y,z)=(e^{yz},\cos(x),x^2+y^2+z)\,.$$

Calcule el flujo "hacia arriba"de $\vec{F}$ a través de la superficie S.

Solución.
Consideramos S_2 la región del plano $z=0$ dentro de la esfera, y E la región dentro de la esfera y sobre el plano. Describe las regiones (**0,5 pto**)

Como S y S_2 forman la frontera de E, y $\vec{F}$ es continuamente diferenciable podemos usar el Teorema de la Divergencia obteniendo:

$$\iiint_E div(\vec{F})\ dV=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$ Aplica T. Divergencia (**1,0 pto**)

donde la normal se considera hacia arriba en S y hacia abajo en S_2. Explicita dirección normales (**0,5 pto**)
La divergencia $div(\vec{F})=\vec{F}_x+\vec{F}_y+\vec{F}_z$ del campo $\vec{F}$ es constante : $div(\vec{F})=1$ Calcula divergencia (**0,5 pto**)

$$\begin{aligned}\iiint_E div(\vec{F})\ dV &= \iiint_E 1\ dV=\text{Volumen hemisferio de radio 2}\\ &= \frac{16}{3}\pi\,.\end{aligned}$$ Calcula integral sobre E(**1,0 pto**)

Para S_2, pensándola como gráfico de $z=0$ sobre el dominio $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$, pero con la normal apuntando hacia abajo. Entonces, $d\vec{S}=(0,0,-1)dxdy$. Explicita la normal de S_2 (**0,5 pto**)

La integral de superficie a calcular es

$$\begin{aligned}\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_D(1,\cos(x),x^2+y^2)\cdot(0,0,-1)\ dxdy\\ &= \iint_D -x^2-y^2\ dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^2 -r^2\ r\ drd\theta\\ &= -8\pi\end{aligned}$$ Calcula integral de superficie (**1,5 pto**)

Luego

$$\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint_E div(\vec{F})\ dV-\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\frac{16}{3}\pi+8\pi=\frac{40}{3}\pi$$

Explicita el resultado (**0,5 pto**)