PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
23 de Junio del 2022

MAT1630 - CÁLCULO III

INTERROGACIÓN 3

P1.- Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad z > 0, z = \sqrt{2x^2 + 2y^2}\}.$$

Encuentre todos los puntos de S donde el plano tangente es paralelo al plano de ecuación

$$x + y + z = 1.$$

Solución:

Todos los vectores normales al plano $x + y + z = 1$ son paralelos a $(1, 1, 1)$. Los vectores normales a los planos tangentes en los puntos buscados deben entonces ser paralelos a $(1, 1, 1)$.

Parametrizamos S con la función

$$r(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sqrt{2}\rho), \quad \rho > 0,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Calculamos un vector normal:

$$\begin{aligned} n(\rho,\theta) &= \partial_\rho r(\rho,\theta) \times \partial_\theta r(\rho,\theta) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & \sqrt{2} \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\sqrt{2}\rho\cos\theta, -\sqrt{2}\rho\sin\theta, \rho) \\ &= \sqrt{2}\rho(-\cos\theta, -\sin\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}). \end{aligned}$$

Para que este vector sea paralelo a $(1, 1, 1)$, necesitamos

$$-\cos\theta = -\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{1}$$

lo cual ocurre para $\theta = 5\pi/4$.

Por lo tanto, los puntos buscados están dados por

$$(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\rho, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\rho, \sqrt{2}\rho), \quad \rho > 0. \tag{2}$$

P2.- Considere el cono S obtenido al rotar el segmento uniendo los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$ alrededor del eje z. Asumiendo que la masa por unidad de superficie se distribuye segun la ley $\rho(z) = 2 - z$, determinar la masa total del cono y las coordenadas de su centro de gravedad.

Solución:

Parametrizamos el cono mediante la función r: $r(\theta, z) = ((1 - z)\cos\theta, (1 - z)\sin\theta, z)$ for $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Calculamos, $r_\theta = (-(1 - z)\sin\theta, (1 - z)\cos\theta, 0)$, $r_z = (-\cos\theta, -\sin\theta, 1)$, lo cual nos lleva a:

$$r_\theta \times r_z = (1 - z)(\cos\theta, \sin\theta, 1),$$

entonces $\|r_\theta \times r_z\| = \sqrt{2}(1 - z)$. La masa total M del cono es:

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \rho\, dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - z)\, \|r_\theta \times r_z\|\, d\theta dz = \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - z)(1 - z)\, d\theta dz \\ &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 (2 - z)(1 - z)\, dz = \frac{5\pi\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Se deducen las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centro de gravedad del cono como sigue:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_S x\rho\, dS = \frac{1}{M}\int_0^1\int_0^{2\pi}(2-z)(1-z)\cos\theta\, \|r_\theta \times r_z\|\, d\theta dz = 0,$$
$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_S y\rho\, dS = \frac{1}{M}\int_0^1\int_0^{2\pi}(2-z)(1-z)\sin\theta\, \|r_\theta \times r_z\|\, d\theta dz = 0,$$
$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iint_S z\rho\, dS = \frac{1}{M}\int_0^1\int_0^{2\pi}(2-z)z\, \|r_\theta \times r_z\|\, d\theta dz = \frac{\sqrt{2}}{M}\int_0^1\int_0^{2\pi}(2-z)z(1-z)\, d\theta dz = \frac{3}{10},$$

o sea

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{3}{10}\right).$$

P3.- Sea $\mathcal{C}$ la curva definida por la intersección del plano $x + z = 2$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + z)$. Utilice el Teorema de Stokes para calcular la integral del campo $F(x, y, z) = (z, 2x, y)$ sobre $\mathcal{C}$, orientando la superficie plana encerrada por $\mathcal{C}$ "hacia arriba" (vector normal con componentes mayores o iguales a cero).

Solución:

Al intersectar el plano con la esfera se obtiene la ecuación

$$x^2 + y^2 + (2-x)^2 = 2 \cdot 2.$$

Desarrollando, se obtiene que las coordenadas x e y de los puntos en $\mathcal{C}$ satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 - 4x &= 0 \\ \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} &= 1 \end{aligned}$$

Para resolver $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ usando Stokes, hay que resolver $\int\int_S \text{rot}(F) \cdot dS$, donde S es la superficie encerrada por $\mathcal{C}$ orientada hacia arriba.

Calculando se obtiene que $\text{rot(F)}(x, y, z) = (1, 1, 2)$.

Podemos parametrizar S usando la función $f(x, y) = (x, y, 2 - x)$, con

$$0 \le x \le 2, \quad -\sqrt{4x - 2x^2} \le y \le \sqrt{4x - 2x^2}.$$

Luego, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1, 0, -1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (0, 1, 0)$. El producto cruz del primer vector con el segundo es $(1, 0, 1)$, que corresponde a la orientación escogida para S.

Luego, obtenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int\int_S \text{rot}(F) \cdot dS = \int_0^2 \int_{-\sqrt{4x-2x^2}}^{\sqrt{4x-2x^2}} \langle (1,1,2), (1,0,1)\rangle dy dx = 3\int_0^2 \int_{-\sqrt{4x-2x^2}}^{\sqrt{4x-2x^2}} 1 dy dx$$

Si se toma en cuenta que esta integral corresponde al área de la elipse descrita dada por la proyección de S en el plano xy, entonces se puede calcular directamente como $\pi \cdot 1 \cdot \sqrt{2}$, por lo que se obtiene

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 3\pi\sqrt{2}.$$

De lo contrario, hay que calcular directamente la integral

$$3\int_0^2 \int_{-\sqrt{4x-2x^2}}^{\sqrt{4x-2x^2}} 1 dy dx = 6\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{2x - x^2} dx$$

haciendo el cambio de variable $x - 1 = \text{sen}\,\theta$, se obtiene

$$6\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{2x - x^2} dx = 6\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \text{sen}\,\theta^2}\cos\theta d\theta = 6\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta^2 d\theta = 3\pi\sqrt{2}.$$

P4.- Para $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, se define

$$E_{(a,b,c)}(x,y,z) = \frac{\langle x-a, y-b, z-c\rangle}{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)^{3/2}}.$$

Considere el campo vectorial

$$F(x,y,z) = (E_{(0,0,0)} + E_{(1,1,1)} + E_{(-1,-1,-1)})(x,y,z).$$

a) Encuentre una superficie cerrada $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ tal que el flujo de $F(x,y,z)$ a través de S_1 es cero.

b) Encuentre una superficie cerrada $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ tal que el flujo de $F(x,y,z)$ a través de S_2 no es cero.

Para ambas preguntas justifique **cuidadosamente** su respuesta. Se sugiere usar que $\operatorname{div}\big(E_{(a,b,c)}\big)(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \neq (a,b,c)$ (ya visto en clases).

Solución:

a) Debería describir una superficie cerrada S_1 que no encierre a los polos y usar el teorema de la divergencia junto con

$$\operatorname{div}\big(F(x,y,z)\big) = \operatorname{div}\big(E_{(0,0,0)}\big) + \operatorname{div}\big(E_{(1,1,1)}\big) + \operatorname{div}\big(E_{(-1,-1,-1)}\big) = 0$$

b) Debería describir una superficie cerrada S_2 que encierre a un polo, digamos $(0,0,0)$, ya que por el teorema de la divergencia:

$$\iint_{S_2} F \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{E}} F \cdot d\vec{S} + \iiint_E \operatorname{div}(F) dV,$$

donde $\mathcal{E}$ es una esfera rodeando al polo y E es el espacio entre S_1 y $\mathcal{E}$. Pero $\operatorname{div}(F) = 0$ y así

$$\iint_{S_2} F \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{E}} F \cdot d\vec{S}.$$

Pero $F = E_{(0,0,0)} + E_{(1,1,1)} + E_{(-1,-1,-1)}$ y así

$$\iint_{\mathcal{E}} F \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{E}} E_{(0,0,0)} \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathcal{E}} E_{(1,1,1)} \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathcal{E}} E_{(-1,-1,-1)} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{E}} E_{(0,0,0)} \cdot d\vec{S},$$

ya que podemos usar el teorema de la divergencia para $E_{(1,1,1)}$ y $E_{(-1,-1,-1)}$ y usar que no hay polos en $\mathcal{E}$ para esos campos vectoriales y la divergencia es cero.
Entonces debemos calcular $\iint_{\mathcal{E}} E_{(0,0,0)} \cdot d\vec{S}$ a mano, tal cual fue hecho en clases, y da 4π.