PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo Semestre 2022

Interrogación N. 2 MAT1630

1. Calcule el centro de masa de un alambre triangular con vértices en $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$ y densidad dada por $\rho(x,y) = xy + 1$.

   Solución:

   Se tiene que el centro de masa del alambre C descrito está dado por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

   $$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)ds, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)ds, \qquad m = \int_C \rho(x,y)ds.$$

   La curva C puede separarse en los tres caminos rectilíneos:

   - El camino C_1, uniendo $(0,0)$ y $(0,1)$, parametrizado por $r_1(t) = (0,t)$, $0 \le t \le 1$.
   - El camino C_2, uniendo $(0,1)$ y $(1,0)$, parametrizado por $r_2(t) = (t, 1-t)$, $0 \le t \le 1$.
   - El camino C_3, uniendo $(1,0)$ y $(0,0)$, parametrizado por $r_3(t) = (1-t, 0)$, $0 \le t \le 1$-

   Notar que $\|r_1'(t)\| = \|(0,1)\| = 1$, $\|r_2'(t)\| = \|(1,-1)\| = \sqrt{2}$ y $\|r_3'(t)\| = \|(-1,0)\| = 1$.

   Luego, se tiene que

   $$\begin{aligned} m = \int_C \rho(x,y)ds &= \int_{C_1} \rho(x,y)ds + \int_{C_2} \rho(x,y)ds + \int_{C_3} \rho(x,y)ds \\ &= \int_0^1 \rho(0,t)\|r_1'(t)\|dt + \int_0^1 \rho(t,1-t)\|r_2'(t)\|dt + \int_0^1 \rho(1-t,0)\|r_1'(t)\|dt \\ &= \int_0^1 1\cdot 1 dt + \int_0^1 (t - t^2 + 1)\sqrt{2}dt + \int_0^1 1\cdot 1 dt \\ &= 1 + \sqrt{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1) + 1 \\ &= 2 + \frac{7\sqrt{2}}{6} = \frac{12 + 7\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)ds = \frac{1}{m}\left(\int_{C_1} x\rho(x,y)ds + \int_{C_2} x\rho(x,y)ds + \int_{C_3} x\rho(x,y)ds\right)$$
$$= \frac{6}{12+7\sqrt{2}}\left(\int_0^1 0\rho(0,t)\|r_1'(t)\|dt + \int_0^1 t\rho(t,1-t)\|r_2'(t)\|dt + \int_0^1 (1-t)\rho(1-t,0)\|r_1'(t)\|dt\right)$$
$$= \frac{6}{12+7\sqrt{2}}\left(0 + \int_0^1 t(t-t^2+1)\sqrt{2}dt + \int_0^1 (1-t)\cdot 1\cdot 1dt\right)$$
$$= \frac{6}{12+7\sqrt{2}}\left(0 + \sqrt{2}\int_0^1 t^2 - t^3 + tdt + \int_0^1 (1-t)dt\right)$$
$$= \frac{6}{12+7\sqrt{2}}(\sqrt{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})+1-\frac{1}{2})$$
$$= \frac{6}{12+7\sqrt{2}}(\frac{7\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{2}) = \frac{6}{12+7\sqrt{2}}\cdot\frac{6+7\sqrt{2}}{12} = \frac{6+7\sqrt{2}}{24+14\sqrt{2}}.$$

Del mismo modo,

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)ds = \frac{1}{m}\left(\int_{C_1} y\rho(x,y)ds + \int_{C_2} y\rho(x,y)ds + \int_{C_3} y\rho(x,y)ds\right)$$
$$= \frac{6}{12+7\sqrt{2}}\left(\int_0^1 t\rho(0,t)\|r_1'(t)\|dt + \int_0^1 (1-t)\rho(t,1-t)\|r_2'(t)\|dt + \int_0^1 0\rho(1-t,0)\|r_1'(t)\|dt\right)$$
$$= \frac{6}{12+7\sqrt{2}}\left(\int_0^1 t\cdot 1\cdot 1dt + \int_0^1 (1-t)(t-t^2+1)\sqrt{2}dt + 0\right)$$
$$= \frac{6}{12+7\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\int_0^1 -2t^2+1+t^3dt\right)$$
$$= \frac{6}{12+7\sqrt{2}}(\frac{1}{2}+\sqrt{2}(\frac{-2}{3}+1+\frac{1}{4}))$$
$$= \frac{6}{12+7\sqrt{2}}(\frac{1}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{12}) = \frac{6}{12+7\sqrt{2}}\cdot\frac{6+7\sqrt{2}}{12} = \frac{6+7\sqrt{2}}{24+14\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, el centro de masa es el punto $\left(\frac{6+7\sqrt{2}}{24+14\sqrt{2}}, \frac{6+7\sqrt{2}}{24+14\sqrt{2}}\right)$

---

2. Calcule $\displaystyle\int_C \frac{x+4y^2+z^2}{\sqrt{1+y^2}}ds$ siendo C la curva intersección del plano $z=2x$ con el cilindro $x^2+y^2=4$.
Solución: Una parametrización para C es $x(t)=2\cos(t),\ y(t)=2\sin(t),\ z=4\cos(t)$. Se tiene

$$\begin{aligned}\sqrt{1+y^2} &= \sqrt{1+4\sin^2(t)},\\ x+4y^2+z^2 &= 2\cos(t)+16\sin^2(t)+16\cos^2(t)=16+2\cos(t)\end{aligned}$$

$(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2=4+16\sin^2(t)=4(1+4\sin^2(t)),$ luego $ds=2\sqrt{1+4\sin^2(t)}dt$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_C \frac{x+4y^2+z^2}{\sqrt{1+y^2}}ds &= 2\int_0^{2\pi}(16+2\cos(t))dt\\ &= 2(16\cdot 2\pi+\int_0^{2\pi}2\cos(t)dt)\\ &= 2(16\cdot 2\pi)dt=64\pi.\end{aligned}$$

3. Calcule la integral

$$\int_\gamma \Big(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dx + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} dy \Big)$$

donde γ es el segmento de recta $y = x-1$ que va desde el punto $(0,-1)$ hasta el punto $(1,0)$.
Solución: Se tiene

$$P(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad Q(x,y) = \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Verificamos a continuación que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\Big(\frac{(x^2+y^2)^2 - y\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \Big) = \frac{2x}{(x^2+y^2)^3}(x^2-3y^2).$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \Big) = \frac{2x}{(x^2+y^2)^3}(x^2-3y^2).$$

Con esta información podemos resolver el problema de las siguientes dos maneras.

Método 1: El segmento de recta γ está claramente contenido en una región simplemente conexa D que no contiene al origen y contiene el cuarto de circunferencia C de ecuación $x^2+y^2=1$ contenida en el cuarto cuadrante, y tanto P como Q son de clase C^1 en D. Por teorema concluímos que el campo vectorial (P,Q) es conservativo y por lo tanto la integral no depende de la trayectoria en D, luego, parametrizando C por $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [3\pi/2, 2\pi]$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \Big(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dx + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} dy \Big) &= \int_C \Big(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dx + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} dy \Big) \\
&= \int_{3\pi/2}^{2\pi} (2\cos(t)\sin(t)(-sin(t)) + (\sin^2(t) - \cos^2(t))\cos(t))dt \\
&= \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-\sin^2(t)\cos(t) - \cos^3(t))dt \\
&= \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-\cos(t))\sin^2(t) + \cos^2(t))dt \\
&= \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-\cos(t))dt = -\sin(t) \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = -1.
\end{aligned}$$

Método 2: Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, vemos si es posible que el campo sea conservativo calculándole un potencial f:
Debe ser que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Integrando con respecto a x la primera condición se tiene, haciendo la sustitución $u = x^2+y^2$, $du = 2xdx$, que

$$f(x,y) = \int \frac{2xydx}{(x^2+y^2)^2} + g(y) = \int \frac{ydu}{u^2} + g(y) = -\frac{y}{u} + g(y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + g(y).$$

Ahora verificamos que esta f satisfaga

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

para alguna función g: Derivando se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{x^2+y^2} + g(y)) = -\frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} + g'(y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + g'(y) = Q(x,y)$$

para $g(y) = C$, C constante. Así,

$$(P(x,y), Q(x,y)) = \nabla f(x,y)$$

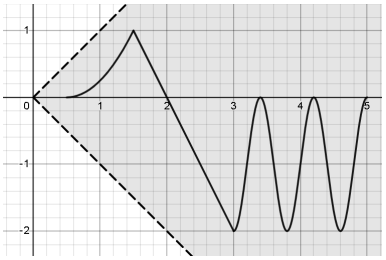
y por lo tanto

$$\int_\gamma \Big(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}dy \Big) = \int_\gamma \nabla f \cdot d\vec{r} = f(1,0) - f(0,-1) = -1.$$

4. Sea $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}} + 2xy, \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} + x^2 \right)$ definida en la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x < y < x\}$, y C la curva obtenida al unir las siguientes curvas:

   - La curva que recorre desde $(1/2, 0)$ hasta $(3/2, 1)$ a través de la gráfica de $y = (x - 1/2)^2$.
   - La curva rectilínea desde $(3/2, 1)$ hasta $(3, -2)$.
   - La curva que recorre desde $(3, -2)$ hasta $(5, 0)$ dada por

     $$\gamma(t) = \left(e^t, \cos\left(\frac{5\pi}{2} e^t - \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right) \text{ con } \ln(3) \leq t \leq \ln(5).$$



Calcule el trabajo realizado por el campo $\boldsymbol{F}$ sobre una partícula que se desplaza a lo largo de C partiendo desde $(1/2, 0)$ y terminando en $(5, 0)$.

Solución: Consideramos $P(x,y) = \dfrac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}} + 2xy$, y $Q(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} + x^2$.

Se verifica que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-x\sqrt{x^2-y^2} + \dfrac{yx}{2\sqrt{x^2-y^2}} \cdot (-2y)}{x^2(x^2-y^2)} + 2x \\
&= \frac{\dfrac{-x^2 + y^2 - y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x(x^2-y^2)} + 2x \\
&= \frac{-x^2}{x(x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2-y^2)^{3/2}} + 2x,
\end{aligned}$$

mientras que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}} \cdot 2x}{x^2-y^2} + 2x = \frac{-x}{(x^2-y^2)^{3/2}} + 2x$$

Por lo que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ en toda la región D. Como la región es simplemente conexa, entonces el campo es conservativo, por lo que el trabajo pedido no depende de la trayectoria.

Consideremos entonces el camino rectilíneo $\boldsymbol{r}(t) = (t, 0)$, con $1/2 \leq t \leq 5$. Entonces $\boldsymbol{r}(0) = (1/2, 0)$ y $\boldsymbol{r}(5) = (5, 0)$, por lo que $\boldsymbol{r}(t)$ tiene el mismo punto inicial y final que la curva C y está contenido dentro de la región, por lo que el trabajo a través de la curva C es igual al trabajo sobre el segmento parametrizado. De esta manera,

$$
\begin{aligned}
W &= \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_{1/2}^{5} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) dt \\
&= \int_{1/2}^{5} (0, \frac{1}{t} + t^2) \cdot (1, 0) dt \\
&= \int_{1/2}^{5} 0 dt = 0
\end{aligned}
$$

Por lo que el trabajo pedido es 0.
