Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2018

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 4

1. Use el teorema de Stokes para calcular

$$\int_C xdx + yz^2dy + xzdz$$

donde C es la intersección de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = y$.

Solución. Usando el teorema de Stokes

$$\int_C xdx + yz^2dy + xzdz = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot dS$$

donde S es la región de la superficie de la semiesfera cuya frontera es la curva C.
Una parametrización de S viene dada por

$$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, \sqrt{1-r^2})\,, \quad 0 \leqslant r \leqslant \text{sen}\,\theta\,, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,.$$

El vector normal a la suoerficie es

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{1-r^2}}, r\right)\,.$$

El rotor del campo es $\text{rot}(\vec{F}) = (-2yz, -z, 0)$ y entonces se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_C xdx + yz^2dy + xzdz &= \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot dS = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\,\theta} (-2r^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - r^2\,\text{sen}\,\theta)\,drd\theta \\
&= -\int_0^\pi \left[\frac{r^4}{2}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \frac{r^3}{3}\,\text{sen}\,\theta\right]_0^{\text{sen}\,\theta} d\theta = -\int_0^\pi \left[\frac{\text{sen}^5\,\theta}{2}\cos\theta + \frac{\text{sen}^4\,\theta}{3}\right] d\theta \\
&= -\left[\frac{\text{sen}^6\,\theta}{12}\right]_0^\pi - \frac{1}{3}\int_0^\pi \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos(2\theta) + \frac{\cos(4\theta)}{2}\right) d\theta = -\frac{\pi}{8}\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por usar correctamente el teorema de Stokes.
- 2 puntos por parametrizar la superficie incluido su dominio.
- 2 puntos por calcular la integral doble.

2. Sea $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^3+3} + \dfrac{3x^3}{2\sqrt{x^3+3}} + 5x^4yz, x^5z, x^5y\right)$.

Calcule $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda}$ siendo C la hélice parametrizada mediante $\lambda(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. Cerramos la curva C uniendo el punto inicial con el punto final mediante la curva $\mu(t) = (1-t)\lambda(0) + t\lambda(1) = (1-t)(1,0,0) + t(1,0,2\pi) = (1,0,2\pi t)$, $t \in [0,1]$.
Sea $S = S_1 \cup S_2$ la superficie cuyo borde son las curvas $C \cup \mu$ donde S_1 es la superficie cilindrica y la tapa $S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0\}$. Entonces, por el teorema de Stokes

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\lambda} + \int_{-\mu} \vec{F} \cdot d\vec{\mu} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot dS\,.$$

Como $\operatorname{rot}(\vec{F}) = (0,0,0)$ se sigue que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\lambda} = -\int_{-\mu} \vec{F} \cdot d\vec{\mu} = \int_{\mu} \vec{F} \cdot d\vec{\mu} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\mu(t)) \cdot \mu'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{3}{4}, 2\pi t, 0\right) \cdot (0,0,2\pi)\, dt = 0\,.$$

Puntaje Pregunta 2.

- 1,5 puntos por cerrar la curva y determinar una parametrización para la curva μ.
- 1,5 puntos por usar el teorema de Stokes.
- 1,5 puntos por calcular la integral doble usando que $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$.
- 1,5 puntos por calcular la integral de línea sobre μ.

3. Calcular el flujo de $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (e^{z^2} + x^2 - y, xy + \sqrt{1 - \text{sen}(z)}, x + zy^2)$ a través de la superficie S dada por la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ sobre el plano $Z = 0$ con sus normales apuntando hacia arriba.

Solución. Sea $D = \{(x,y,0) \ : \ x^2 + y^2 = 9\}$ y sea $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ 0 \leq z \leq 9, \ x^2 + y^2 \leq 9 - z\}$, entonces $K \cup D$ es la frontera de Ω.

Entonces $f(r,\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta), (3-r)^2), \ 0 \leq r \leq 3, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $g(r,\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta), 0)$, $0 \leq r \leq 3, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ parametrizan K y D respectivamente.

$$N_f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos(\theta) & sen(\theta) & 2r-6 \\ -rsen(\theta) & rcos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = (-r(2r-6)cos(\theta), -r(2r-6)sen(\theta), r)$$

$$N_g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -rsen(\theta) & rcos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)$$

por lo tanto N_f apunta hacia el exterior de Ω y N_g hacia el interior.

Por el teorema de la divergencia se tiene que

$$\iiint_{\Omega} div(\overrightarrow{F}) dx \, dy \, dz = \iint_{K} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} - \iint_{C} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A}$$

Usando coordenadas cilíndricas, como $div(\overrightarrow{f}) = 3x + y^2$, nos queda

$$\begin{aligned} \iint_{K} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} &= \int_0^{2\pi} \int_0^9 \int_0^{\sqrt{9-z}} r(3rcos(\theta) + r^2 \,\text{sen}^2(\theta)) dr \, dz \, d\theta + \iint_{C} \overrightarrow{F}(g) \cdot N_g d\, A \\ &= \left[\int_0^{2\pi} cos(\theta) \, d\theta\right] \left[\int_0^9 \int_0^{\sqrt{9-z}} 3r^2 dr \, dz\right] + \left[\int_0^{2\pi} sen^2(\theta) \, d\theta\right] \left[\int_0^9 \int_0^{\sqrt{9-z}} r^3 dr \, dz\right] \\ &\quad + \left[\int_0^{2\pi} cos(\theta) \, d\theta\right] \left[\int_0^3 r^2 \, dr\right] \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^9 (9-z)^2 \, dz = \frac{243}{4}\pi \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 3.

- 1,5 puntos por cerrar la superficie para que sea cerrada y parametrizar la tapa.
- 1,5 puntos por parametrizar la superficie K.
- 1 puntos por utilizar (correctamente) el teorema de la divergencia.
- 2 puntos por calcular la integral triple.

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un sólido acotado tal que el punto $(0,0,0)$ no está en la frontera de Ω. Demuestre que

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot dS = \begin{cases} 4\pi & \text{si } 0 \in \Omega \\ 0 & \text{si } 0 \notin \Omega \end{cases}$$

Solución. Sean $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ y $\|\boldsymbol{r}\| = \|r(x,y,z)\| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$.

Si $(0,0,0) \notin \partial\Omega$, entonces el campo vectorial es de clase C^1 en Ω y en virtud del teorema de la divergencia

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3}\right) dV$$

Como $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}/\|r\|^3) = 0$ para $\boldsymbol{r} \neq 0$, se obtiene que

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = 0\,.$$

Ahora bien, si $(0,0,0) \in \partial\Omega$ y $(0,0,0) \notin \partial\Omega$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola B de radio ε con centro en $(0,0,0)$ está completamente contenida en Ω. Sea S la región entre Ω y B. Entonces, S tiene frontera $\partial B \cup \partial\Omega = \partial S$. La orientación en ∂B inducida por la normal exterior en S es opuesta a la obtenida a partir de B. Ahora $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}/\|r\|^3) = 0$ en S, de modo que por el teorema de la divergencia,

$$\iint_{\partial S} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = \iiint_{S} \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3}\right) dV = 0\,.$$

Como

$$\iint_{\partial S} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = \iint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS + \iint_{\partial B} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS$$

tenemos

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = -\iint_{\partial B} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS$$

Ahora bien, en ∂B, $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}/\|r\|$ y $\|\boldsymbol{r}\| = \varepsilon$, pues ∂B es una esfera de radio ε, de modo que

$$-\iint_{\partial B} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = \iint_{\partial B} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon^2}(4\pi\varepsilon^2) = 4\pi\,.$$

Puntaje Pregunta 4.

- 1 punto por verificar que $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}/\|r\|^3) = 0$.
- 2 puntos mostrar que la integral da cero cuando $(0,0,0) \notin \Omega$.
- 3 puntos por mostrar que la integral de superficie es 4π cuando $(0,0,0) \in \Omega$.