Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemticas
Temporada Acadmica de Verano 2019

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 3

1. Determine la masa de un embudo delgado con forma de cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 4$, si su función densidad es $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

   Solución:

   La masa es $\int\int_S \rho(x, y, z)ds$ donde S es la parte del cono $r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ con $(x, y) \in D$, $D = \{(x, y)|1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4\}$.

   Se tiene que $r_x \times r_y = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) \times (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) = (\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$

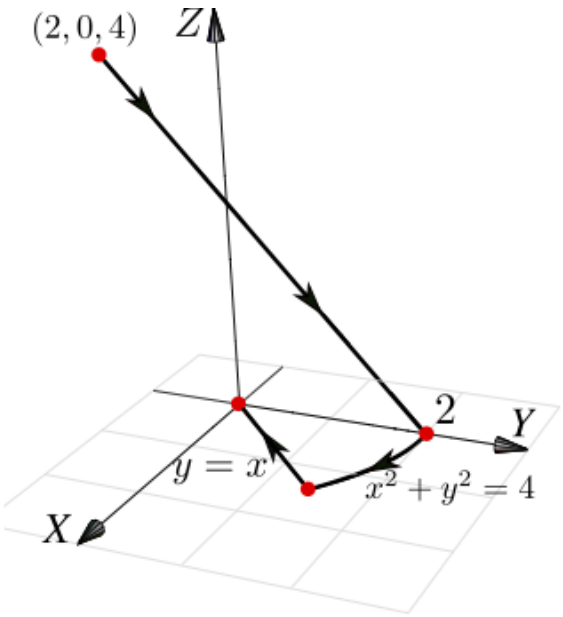
   $||r_x \times r_y|| = \sqrt{2}$

   Luego

   $\int\int_S \rho(x, y, z)ds = \int\int_D \rho(r(x, y))||r_x \times r_y||dA =$

   $\int\int_D (10 - \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{2}dA = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 (10 - r)rdrd\theta = 180\sqrt{2}\pi.$

2. Considere el campo de vectores $F(x,y,z) = 4xe^z\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(y)\,\hat{\mathbf{j}} + 2x^2e^z\,\hat{\mathbf{k}}$.
Sea C la curva de la figura de abajo. Calcule $\int_C F \cdot dr$.



Solución:

F es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^3$ que es un abierto conexo. Además rot $(F) = \vec{0}$, entonces el campo F es conservativo y luego es independiente de la trayectoria. Buscamos la función potencial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$, es decir

$$f_x = 4xe^z \Rightarrow f(x,y,z) = \int 4e^z\,dx = 2x^2e^z + K_1(y,z)$$

$$f_y = \cos(y) \Rightarrow f(x,y,z) = \int \cos(y)\,dy = \operatorname{sen}(y) + K_2(x,z)$$

$$f_z = 2x^2e^z \Rightarrow f(x,y,z) = \int 2x^2e^z\,dz = 2x^2e^z + K_3(x,y)$$

Usando el teorema fundamental de las integrales de lnea se sigue que

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(0,0,0) - f(2,0,4) = -8e^4\,.$$

3. Calcular $\int\int_S rotF \cdot dS$, donde

$$F(x,y,z) = (e^{xy}, e^{xz}, x^2 z)$$

y S es la mitad del elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ que está a la derecha del plano xz, orientado en la dirección del eje y positivo.

Solución:

Usando el teorema de Stokes se tiene que
$\int\int_S rotF \cdot dS = \int_C F \cdot dr$ donde C es la curva curva borde del la semielipse dada. Es decir la curva $x^2 + z^2 = 1$ que podemos parametrizar como $r(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ (y así su orientación es positiva según la orientación indicada del elipsoide)

Por lo que se tiene que
$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt$
de donde $F(r(t)) = (1, e^{\cos t \sin t}, \cos^2 t \sin t)$ y $r'(t) = (-\sin t, 0, \cos t)$.
Por lo que $F(r(t)\cdot) r'(t) = -\sin t + \cos^3 t \sin t$
y luego
$\int_0^{2\pi} F(r(t)\cdot) r'(t) dt = \int_0^{2\pi} -\sin t + \cos^3 t \sin t dt = 0$

4. Use el teorema de la divergencia para demostrar que el volumen de un cubo de lado a es a^3.
Solución:

Si tomamos el campo vectorial $F = (x, 0, 0)$ ($divF = 1$) y si E es la regón sólida interior del cubo de lado a, se tendría que $\int\int\int_E divF dV$ es el volumen del cubo de lado a.

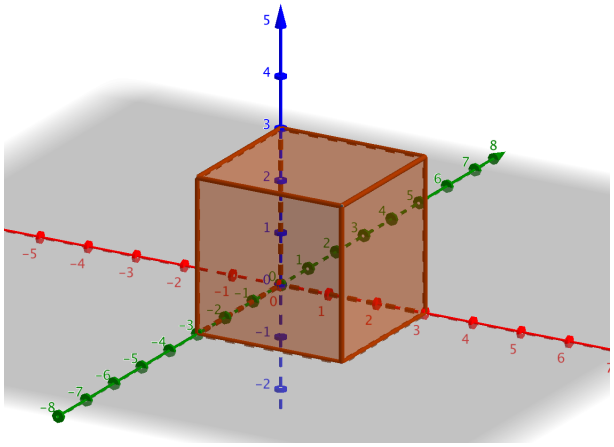
Usando el teorema de la divergencia tendríamos entonces que:
Volumen del cubo de lado a=$\int\int\int_E divF dV$=$\int\int_S F \cdot dS$ donde S es el cubo de lado a.

Tendríamos entonces que calcular

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int_{S_1} F \cdot dS + ... + \int\int_{S_6} F \cdot dS$$

donde S_i representa cada una de las 6 caras del cubo.

Si situamos el cubo en los ejes coordenadas como en el dibujo, nos damos cuenta que las 2 caras paralelas al plano yz tiene vector normal en la dirección del eje x (1,0,0) y estos serán las únicas caras con vector normal n tal que $F \cdot n \neq 0$ (los otros vectores normales son $(0,1,0)$ o $(0,0,1)$.)



Cara S_1: $r(y,z) = (a,y,z)$ con $0 \leq y \leq a$ y $0 \leq z \leq a$, $r_y \times r_z = (1,0,0)$

Cara S_2, $r(y,z) = (0,y,z)$ con $0 \leq y \leq a$ y $0 \leq z \leq a$, $r_y \times r_z = (1,0,0)$

Luego

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int_{S_1} F \cdot dS = \int_0^a \int_0^a a dA = a^3.$$