Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 7

Teorema de Green

1. Resumen

El teorema de Green relaciona las integrales de línea sobre una curva simple cerrada C y una región plana D acotada por C, donde por **convención toma la orientación positiva** de la curva simple cerrada C.

Teorema de Green

Sea una curva C simple cerrada, suave por tramos con orientación positiva en el plano, y sea D la región que está delimitada por C. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a D, entonces

$$\int_C P\ dx + Q\ dy = \int\int_D (\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy})\ dA$$

Recuerden que P y Q son las componentes del campo vectorial.

Otros usos:

Algunas veces puede ser más fácil evaluar la integral de línea en vez de la integral doble. Si por algún motivo $P(x,y) = Q(x,y) = 0$, el teorema queda $\int_C P\ dx + Q\ dy = \int\int_D (\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy})\ dA = 0$ sin importar que P y Q se elija.

Además, recordemos de C2 que si el integrando de la integral doble es 1, se obtiene el área de la región.

$$\int\int_D 1dA = Area\ D$$

Entonces, si seleccionamos P y Q tales que

$$\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy} = 1$$

Podemos tener el área de la región.

Algunas elecciones para obtener 1 son

$$P(x,y) = 0 \qquad P(x,y) = -y \qquad P(x,y) = -\frac{1}{2}y$$
$$Q(x,y) = x \qquad Q(x,y) = 0 \qquad Q(x,y) = \frac{1}{2}x$$

$$A = \oint_C x\ dy = -\oint_C y\ dx = \frac{1}{2}\oint_C x\ dy - y\ dx$$

2. Problemas

Problema 1

Sea γ la curva formada por la unión de la parte superior de semicircunferencia de radio 1, centrada en el origen y con extremos en los puntos $\mathbf{O} = (1, 0)$ y $\mathbf{P} = (-1, 0)$, y los segmentos de recta $\bar{PQ}, \bar{QR}$ y $\bar{RS}$ con $\mathbf{Q} = (-1, -1), \mathbf{R} = (0, -2)$ y $\mathbf{S} = (1, -1)$. Sea α una parametrización de γ recorrida positivamente (i.e. en sentido contrario a los punteros del reloj).
Calcular $\int F \cdot d\alpha$, con $F(x, y) = (2(y^3 - 1) + y^2, 6xy^2 + 3x^2y^2)$

Problema 2

Calcule

$$\int_{\vec{r}} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$$

donde $\vec{r}(t) = (t, 1 - t^2), t \in [-1, 1]$.

Problema 3

Sea C la curva dada por $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ orientada en sentido antihorario. Evaluar $\int_C \vec{(F)} \cdot d\vec{r}$ si el campo vectorial $\vec{F}$ está dado por

$$\vec{F}(x, y) = (ln(1 + y)), \frac{x(2 + y)}{1 + y})$$

Problema 4

Considere la curva C parametrizada como

$$r(t) = (cos(t)(2 + sen(t)e^t), sen(t)(3 + cos^2(t))) \ , \quad t \in [0, \pi]$$

Calcular $\int_C \vec{F} \cdot dr$, donde $\vec{F}$ corresponde al campo

$$\vec{F}(x, y) = (3 - \frac{y}{x^2 + y^2}, 2 + \frac{x}{x^2 + y^2})$$