Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2016

MAT1630 $*$ Cálculo 3

1. Considere la región $\mathcal{R}$ acotada y delimitada por las curvas.

$$y = \sin(x), \quad y = \cos(x) + 1, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calcular el centro de masa de la región $\mathcal{R}$.

Solución. Las coordenadas del centro de masa están dadas por

$$\overline{x} = \frac{\int_0^{\pi/2} x(\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx}{\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx} \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1)^2 - (\sin(x))^2\, dx}{\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx}$$

donde

$$\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\pi/2} x(\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx = \frac{1}{8}(-16 + 4\pi + \pi^2)$$
$$\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1)^2 - (\sin(x))^2\, dx = \frac{4 + \pi}{2}$$

por lo tanto, las coordenadas del centro de masa son Las coordenadas del centro de masa están dadas por

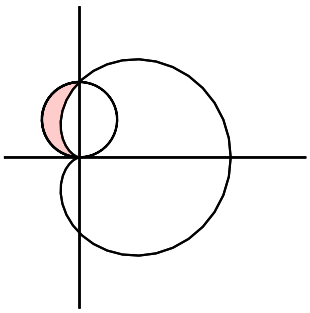
$$\overline{x} = \frac{\frac{1}{8}(-16 + 4\pi + \pi^2)}{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{\frac{4 + \pi}{4}}{\frac{\pi}{2}}$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por calcular $\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx$.
- Asignar (**2 pto**) por calcular $\int_0^{\pi/2} x(\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx$.
- Asignar (**2 pto**) por calcular $\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1)^2 - (\sin(x))^2\, dx$.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar cada coordenada del centro de masa.

2. Sea $\mathcal{R}$ la región que se encuentra al exterior de la curva polar $r = 1 + \cos(\theta)$ y al interior de la curva polar $r = \sin(\theta)$. Calcular el perímetro de la región $\mathcal{R}$.

Solución. La gráfica de ambas curvas polares está dada por



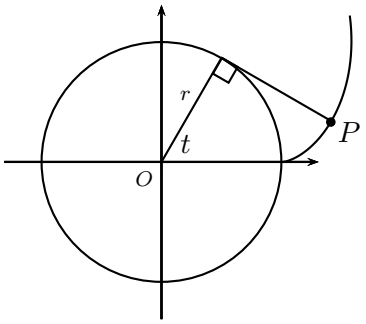
donde la región $\mathcal{R}$ ha sido coloreada. El perímetro de la curva corresponde a una sección de circunferencia y una sección del cardioide, ambas comprendidas para t entre $\pi/2$ y π. De este modo el perímetro de la región está dado por

$$\begin{aligned}&\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{(1+\cos(t))^2 + \sin^2(t)}\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\sin(t)^2 + \cos^2(t)}\, dt \\ &= \left(4 - 2\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

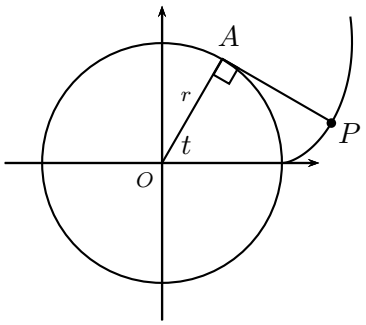
Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por determinar explícita o implícitamente (como índices de la integral) en qué intervalo se debe(n) calcular la(s) integral(es).
- Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{(1+\cos(t))^2 + \sin^2(t)}\, dt$
- Asignar (**2 ptos**) por determinar (o calcular) que el perímero de la región $\mathcal{R}$ comprendida en la circunferencia corresponde a $\dfrac{\pi}{2}$.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar el perímetro.

3. Se enrolla una cuerda alrededor de un círculo y luego se desenrolla mientras se mantiene tensa (ver la figura). El círculo tiene radio r y centro O, y la posición inicial de P es $(r, 0)$. Determine las coordenadas del punto P como función del ángulo t de la figura.



Solución. Consideremos la figura



El segmento $\overline{AP}$ mide el perímero de la sección circular asociada al ángulo t, vale decir

$$AP = t \cdot r$$

Las coordenadas del punto P corresponden al vector $\overrightarrow{OP}$, luego

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

y por tanto las coordenadas de P están dadas por

$$(x, y) = r(\cos(t), \sin(t)) + t \cdot r(\sin(t), -\cos(t))$$

es decir,

$$x = r(\cos(t) + t\sin(t)) \qquad \text{e} \qquad y = r(\sin(t) - t\cos(t))$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar la medida del segmento $\overline{AP}$.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar la coordenada x del punto P.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar la coordenada y del punto P.

4. Considere las superficies

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 = y^2 - z^2\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \mid x + z = 2\}.$$

(a) Determine una parametrización para la curva intersección entre las superficies S_1 con S_2.

(b) Calcular el vector tangente unitario T a la curva en el punto $(1, \sqrt{2}, 1)$.

Solución.

Alternativa 1. Si suponemos que $x = \rho\cos(t)$ y $z = \rho\sin(t)$ entonces de la ecuación que determina a S_1 se obtiene que

$$y^2 = \rho^2$$

De la ecuación que determina a S_2 se obtiene que

$$\rho = \frac{2}{\cos(t) + \sin(t)}$$

por lo tanto una parametrización para la curva es

$$x = \frac{2}{\cos(t) + \sin(t)}\cos(t), \qquad y = \frac{4}{(\cos(t) + \sin(t))^2}, \qquad z = \frac{2}{\cos(t) + \sin(t)}\sin(t)$$

Alternativa 2. Si suponemos que $y = r\cosh(t)$ y $z = r\sinh(t)$ entonces de la ecuación que determina a S_1 se obtiene que

$$x^2 = r^2$$

De la ecuación que determina a S_2 se obtiene que

$$r = \frac{2}{\pm 1 + \sinh(t)}$$

por lo tanto una parametrización para la curva es

$$x = \frac{4}{(\pm 1 + \sinh(t))^2}, \qquad y = \frac{2}{\pm 1 + \sinh(t)}\cosh(t), \qquad z = \frac{2}{\pm 1 + \sinh(t)}\sinh(t)$$

Alternativa 3. Como $x = 2 - z$, entonces

$$(2 - z)^2 = y^2 - z^2 \;\Rightarrow\; 4 - 4z + 2z^2 = y^2 \;\Rightarrow\; 1 = \frac{y^2}{2} - (z - 1)^2.$$

Tal curva corresponde a una hipérbola, así si elegimos

$$y(t) = \sqrt{2}\cosh(t),\; z(t) = \sinh(t) + 1,\; x(t) = 1 - \sinh(t).$$

Ahora calculamos el tangente en $(1, \sqrt{2}, 1)$. Sin pérdida de generalidad, dada la parametrización

$$x = \frac{2}{\cos(t) + \sin(t)}\cos(t), \qquad y = \frac{4}{(\cos(t) + \sin(t))^2}, \qquad z = \frac{2}{\cos(t) + \sin(t)}\sin(t)$$

en $t = \pi/4$ se obtiene el punto $(1, \sqrt{2}, 1)$. Luego

$$x' = -\frac{2}{(\cos(t) + \sin(t))^2}, \qquad y' = -8\frac{\cos(t) - \sin(t)}{(\cos(t) + \sin(t))^3}, \qquad z' = \frac{2}{(\cos(t) + \sin(t))^2}$$

de donde se deduce que el tangente en $t = \pi/4$ es

$$(-1, 0, 1)$$

y por tanto el tangente unitario será

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por cada coordenadas en la parametrización.
- Asignar (**0.5 ptos**) calcular la derivada de cada coordenada en la parametrización.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar en qué valor del parámetro se está en el punto $(1, \sqrt{2}, 1)$.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar el tangente unitario.

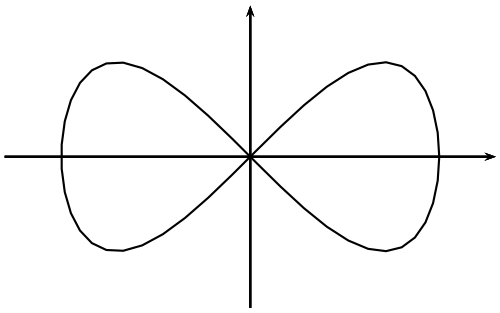
5. Considere la curva de ecuaciones paramétricas $x = \cos(t)$ e $y = \cos(t)\sin(t)$.

   (a) Trace la gráfica de la curva paramétrica para $t \in [0, 2\pi]$. Identifique los puntos de intersección con los ejes coordenados, intervalos de crecimiento y concavidad.

   (b) Determine el área encerrada por la curva.

Solución.

(a) La gráfica es



(b) Por la simetría de la gráfica se desprende que el área pedida está dada por

$$A = 4\left|\int_0^{\pi/2} y(t)x'(t)\,dt\right| = \frac{4}{3}$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por una gráfica aproximada a la propuesta en esta pauta (que se vean dos loops que pasan por el origen y sean simétricos respecto al eje X).
- Asignar (**1 ptos**) por determinar ALGÚN intervalo que permita calcular el área pedida. (ejemplo $[0, \pi/2]$, $[0, \pi]$, etc)
- Asignar (**2 ptos**) por calcular correctamente la integral propuesta, siempre y cuando representa 1/4, 1/2 o 1 del área total pedida. Para ello el alumno debe evidenciar explícita o implícitamente que parte del área está calculando. En caso contrario no se otorgará puntaje.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular el área POSITIVA. Si el resultado es negativo y no hace el cambio de signo, no se otorgará puntaje.

6. Calcular el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar la curva de ecuación $y = x^2$, $x \in [0, 1]$ en torno a la recta $y = x$.

Solución. Aproximando por Riemann, la integral a calcular es

$$2\pi \int_0^1 d(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

siendo $d(x)$ la distancia del punto $(x, f(x))$ a la recta $y = x$ y $f(x) = x^2$. De lo anterior tendremos que el área es

$$2\pi \int_0^1 \frac{x^2 - x}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{\pi(16 - 18\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\text{arcsinh}(\sqrt{2}))}{48\sqrt{2}}$$

Evaluación.

- Asignar (**3 ptos**) por determinar una representación en integral para el área de la superficie: ejemplo $2\pi \int_0^1 \frac{x^2-x}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 4x^2}\, dx$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular la integral $\int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 1/12(-1 + 5\sqrt{5})$
- Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral $\int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 1/64(18\sqrt{5} - \text{arcsinh}(2))$

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa