PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
30 de marzo de 2016.

MAT–1630 - CALCULO III
Interrogación N° 1

1. Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$. El cambio de variables $x = uv,\ \ y = \dfrac{u^2 - v^2}{2}$ transforma a la función $f(x, y)$ en la función $g(u, v)$.

   a) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en términos de las derivadas parciales de f.

   Solución:
   Por la Regla de la Cadena,

$$\begin{aligned} g_u &= f_x\, x_u + f_y\, y_u = f_x\, v + f_y\, u \\ g_v &= f_x\, x_v + f_y\, y_v = f_x\, u - f_y\, v \end{aligned}$$

   b) Si $|f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)| = 2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, determine las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$a\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 u} - b\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 v} = u^2 + v^2.$$

   Solución:
   Por la parte anterior tenemos que

$$\begin{aligned} g_{uu} &= (f_x)_u\, v + (f_y)_u\, u + f_y \\ &= (f_{xx}x_u + f_{xy}y_u)\, v + (f_{yx}x_u + f_{yy}y_u)\, u + f_y \\ &= f_{xx}\, v^2 + 2f_{xy}\, uv + f_{yy}\, u^2 + f_y \end{aligned}$$

   y análogamente,

$$g_{vv} = f_{xx}\, u^2 - 2f_{xy}\, uv + f_{yy}\, v^2 - f_y,$$

   Luego,

$$a\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 u} - b\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 v} = v^2\,(af_{xx} - bf_{yy}) + u^2\,(af_{yy} - bf_{xx}) + (a + b)\,(2uvf_{xy} + f_y)$$

   y se cumple la identidad

$$a\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 u} - b\,\frac{\partial^2 g}{\partial^2 v} = u^2 + v^2.$$

   si

$$af_{xx} - bf_{yy} = 1; \qquad af_{yy} - bf_{xy} = 1 \quad \text{y} \qquad a + b = 0.$$

Entonces, de la igualdad
Sumanod las dos primeras y usando que $f_{xx} + f_{yy} = 2,$ obtenemos $a - b = 1.$ Como la tercera igualdad es $a + b = 0,$ de dicho sistema obtenemos $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}.$

2. La temperatura en el punto $(x,\, y)$ de una lámina metálica viene dada por la función $T(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Hallar la razón de crecimiento máximo de la temperatura en el punto $(3,\, 4)$ y la dirección en que ella ocurre.

Solución:

La dirección de crecimiento máximo es la del gradiente en dicho punto.

Como

$$\nabla f(x,\, y) \;=\; (f_x,\, f_y) \;=\; \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \,,\, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Luego, la dirección de máximo crecimiento es $\nabla f(3, 4) = \left(\dfrac{7}{625} \,,\, \dfrac{-24}{625} \right)$.

(o, simplemente, la del vector $(7,\, -24)$).

La razón de crecimiento máximo es

$$||\nabla f(3, 4)|| \;=\; \frac{1}{625} \sqrt{7^2 \,+\, 24^2} \;=\; \frac{\sqrt{625}}{625} \;=\; \frac{1}{25} \,.$$

3. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2+2y^2+3z^2 = 21$ que sean paralelos al plano $x+4y+6z=0$.

Solución:

El plano $x+4y+6z=0$ tiene vector normal $\vec{n}_1 = (1,\, 4,\, 6)$.

La superficie $x^2+2y^2+3z^2 = 21$ tiene, en un punto $(x,\, y,\, z)$ de ella, vector normal $\nabla f = (2x,\, 4y,\, 6z)$.

Por tanto, los puntos de la superficie en los que el plano tangente tiene dirección paralela al vector $(1, 4, 6)$ son aquellos que satisfacen

$$\frac{2x}{1} = \frac{4y}{4} = \frac{6z}{6} \qquad \text{y, además,} \qquad x^2+2y^2+3z^2 = 21.$$

Las dos primeras igualdades nos dicen que $z = y = 2x$. Sutituyendo en la última obtenemos $21x^2 = 21 \Rightarrow x = \pm 1$.

Luego, los puntos de la superficie buscados son $P_1 = (1,\, 2,\, 2)$ y $P_1 = (-1,\, -2,\, -2)$.

Los planos tangentes en tales puntos son, respectivamente,

$$\Pi_1 : x + 4y + 6z = 21 \qquad \& \qquad \Pi_1 : x + 4y + 6z = -21.$$

4. Encuentre y clasifique los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Solución:

Debemos primero resolver el sistema $f_x = f_y = 0$. Esto es,

$$3x^2 + 3y^2 = 15$$

$$6xy = 12$$

Sumando obtenemos

$$3(x+y)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x + y = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - x \quad \text{o} \quad y = -3 - x.$$

Sustituyendo $y = 3 - x$ en la segunda ecuación obtenemos

$$x(3-x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1; \quad x = 2,$$

obteniendo así los primeros dos puntos críticos: $P_1 = (1, 2)$ y $P_2 = (2, 1)$

Sustituyendo $y = -3 - x$ en la segunda ecuación obtenemos

$$x(3+x) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1; \quad x = -2,$$

obteniendo así dos puntos críticos más : $P_3 = (-1, -2)$ y $P_4 = (-2, -1)$

Para establecer su carácter usamos el discriminante (hessiano)

$$\Delta(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Entonces:

$\Delta(P_1) = 36(1^2 - 2^2) < 0 \quad \Rightarrow \quad P_1$ es punto de silla

$\Delta(P_2) = 36(2^2 - 1^2) > 0$ y $f_{xx}(P_2) = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad P_2$ es punto de mínimo local

$\Delta(P_3) = 36((-1)^2 - (-2)^2) < 0 \quad \Rightarrow \quad P_3$ es punto de silla

$\Delta(P_4) = 36((-2)^2 - (-1)^2) > 0$ y $f_{xx}(P_4) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad P_4$ es punto de máximo local

5. Hallar los valores extremos de $f(x,y) = x^2+2y^2-2x+3$ en el disco cerrado $x^2+y^2 \leq 10$.

Solución:

Primero estudiamos puntos críticos en el interior de la región buscando, en ella, soluciones del sistema $f_x = f_y = 0$. Esto es,

$$2x = 2; \qquad 4y = 0 \qquad \text{obteniendo el punto} \quad P_1 = (1, 0)$$

que está, efectivamente, dentro del disco.

Analizamos ahora el borde. Se trata de extremar $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$.

Las soluciones son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 2x\lambda \\ 4y &= 2y\lambda \\ x^2 + y^2 &= 10 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación, $y = 0$ o $\lambda = 2$.

Del primero de esos casos , y sustituyendo en la restricción obtenemos dos nuevos puntos: $P_2 = (-\sqrt{10}, 0)$ y $P_3 = (\sqrt{10}, 0)$.

Si tomamos ahora $\lambda = 2$ y sustituímos en la primera ecuación resulta $x = -1$ por lo que obtenemos los puntos $P_4 = (-1, -3)$ y $P_5 = (-1, 3)$.

Evaluando f en los tres puntos obtenidos resulta que el valor máximo es $24 = f(P_4) = f(P_5)$ mientras que el mínimo es $2 = f(P_1)$.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
27 de abril de 2016.

MAT–1630 - CALCULO III
Interrogación N° 2

1. Encuentre una función $\phi(t)$, no no constante, de modo que la curva $\vec{r}(t) = (\cos\, t,\, \text{sen}\, t,\, \phi(t))$ sea plana.

   Solución : Recordemos que una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es plana si y sólo si su torsión $\tau(t) = 0$, para todo $t \in I$

   La torsión τ está dada por

   $$\tau(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

   Realizando los cálculo tenemos que

   $$\begin{aligned}
   \alpha'(t) &= (-\sin t, \cos t, \phi'(t)) \\
   \alpha''(t) &= (-\cos t, -\sin t, \phi''(t) \\
   \alpha'''(t) &= (\sin t, -\cos t, \phi'''(t)) \\
   \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (\phi''(t)\cos t + \phi'(t)\sin t, \phi''(t)\sin t - \phi'(t)\cos t, 1) \\
   (\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t) &= \phi'(t) + \phi'''(t).
   \end{aligned}$$

   De esta manera α es plana si y sólo si $\phi'(t) + \phi'''(t) = 0$. Una función $\phi(t)$ que satisface lo anterior es de la forma $\phi(t) = a\sin t + b\cos t + c$, donde a, b, c son números reales arbitrarios. Finalmente, cualquier elección de a, b y c produce una función $\phi(t)$ de modo que la curva α es plana. Por ejemplo, $\phi(t) = \cos(t)$ o $\phi(t) = \text{sen}(t)$.

2. Sea $\gamma(s)$ una curva arcoparametrizada en $\mathbb{R}^3$. Suponga que la curvatura $k(s)$ y torsión $\tau(s)$ de la curva $\gamma(s)$ satisfacen la relación

$$\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)^2 = 1.$$

Si $N(s), B(s)$ denotan el vector normal y binormal unitarios de $\gamma(s)$, pruebe que la curva $p(s)$ dada por

$$p(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s) - \left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)B$$

es constante y calcule el valor de $||\gamma(s) - p(0)||^2$.

Solución : Para probar que la curva $p(s)$ es constante calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{ds}(s) &= T(s) + \left(\frac{1}{k}\right)' N(s) + \frac{1}{k}\left(-kT(s) + \tau B(s)\right) - \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)' B(s) - \frac{k'}{k^2\tau}\left(-\tau N(s)\right) \\
&= T(s)\left(1 - \frac{k}{k}\right) + N(s)\left(\frac{-k'}{k^2} + \frac{k'\tau}{k^2\tau}\right) + B(s)\left(\frac{\tau}{k} - \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)'\right) \\
&= B(s)\frac{k^2\tau}{2k'}\left(2\frac{k'}{k^3} - 2\frac{k'}{k^2\tau}\left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)'\right) \\
&= B(s)\frac{-k^2\tau}{2k'}\left(\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)^2\right)' \\
&= B(s)\frac{-k^2\tau}{2k'}(1)' = 0.
\end{aligned}$$

Luego la cruva $p(s) = p(0)$ es constante.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
||\gamma(s) - p(0)||^2 &= ||\gamma(s) - p(s)||^2 \\
&= ||\frac{1}{k}N - \frac{k'}{\tau k^2}B||^2 \\
&= \frac{1}{k^2}||N||^2 - 2\frac{k'}{\tau k^3}\langle N, B\rangle + \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)^2 ||B||^2 \\
&= \frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas como:

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (xy + z^2, x^2y - y^2z),$$

$$g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v)) = (e^v, e^u).$$

Muestre que cerca del punto $(x, y, x, u, v) = (1, 1, 0, 0, 0)$ se puede resolver $f(x, y, z) - g(u, v) = (0, 0)$ para u y v como funciones de x, y, z y calcule , en dicho punto, u_x y v_y.

Solución : Definimos:

$$F(x, y, z, u, w) = f_1(x, y, z) - g_1(u, v) = xy + z^2 - e^v,$$

$$G(x, y, z, u, w) = f_2(x, y, z) - g_2(u, v) = x^2y - y^2z - e^u.$$

Queremos encontrar u, v en función de x, y, z tal que $F(x, y, z, u, w) = G(x, y, z, u, w) = 0$.

Para esto debemos verificar:

- Claramente $F(1, 1, 0, 0, 0) = G(1, 1, 0, 0, 0) = 0$.
- F y G son diferenciables cerca de $(1, 1, 0, 0, 0)$. Esto se justifica al ser suma y multiplicación de funciones diferenciables, o bien, verificando que todas sus derivadas parciales son continuas. Efectivamente,

$$F_x = y, \quad F_y = x, \quad F_z = 2z, \quad F_u = 0, \quad F_v = -e^v,$$

$$G_x = 2xy, \quad G_y = x^2 - 2yz, \quad G_z = -y^2, \quad G_u = -e^u, \quad G_v = 0.$$

- Finalmente, calculamos $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = -e^{u+v}$. Por lo tanto, obtenemos que

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(1, 1, 0, 0, 0) = -1 \neq 0.$$

Por Teorema de la función implícita, tenemos que existen ϕ_1, ϕ_2 funciones diferenciables tal que $u = \phi_1(x, y, z)$ y $v = \phi_2(x, y, z)$ en una vecindad de $(1, 1, 0, 0, 0)$.

También el Teorema de la función implícita nos dice que:

$$u_x(1, 1, 0, 0, 0) = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}(1, 1, 0, 0, 0)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(1, 1, 0, 0, 0)} = \frac{2xy}{e^u}(1, 1, 0, 0, 0) = 2,$$

$$v_y(1, 1, 0, 0, 0) = \frac{-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(1, 1, 0, 0, 0)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(1, 1, 0, 0, 0)} = \frac{x}{e^v}(1, 1, 0, 0, 0) = 1.$$

4. Considere la función $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z, w) = \left(x^2 + yz, y(x + w), z(x + w), yz + w^2\right).$$

Demuestre que F es invertible en una vecindad del punto $P = (1, 0, 0, 1)$ y encuentre la matriz jacobiana de su inversa en el punto $F(P)$.

Solución : Primero calculamos la martiz jacobiana de F en el punto P, esto es

$$\begin{aligned} JF(P) &= \begin{pmatrix} 2x & z & y & 0 \\ y & x+w & 0 & y \\ z & 0 & x+w & z \\ 0 & z & y & 2w \end{pmatrix}(P) \\ &= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notar que $JF(P) = 2\mathrm{Id}_{4\times 4}$, que es invertible pues es una ponderación de la matriz identidad de 4×4 o bien su determinante es $\det(JF(P)) = 2^4 = 16 \neq 0$.
Luego por el teorema de la función inversa F es invertible en una vecindad del punto P.
Por otro lado la matriz jacobiana de F^{-1} en el punto $F(P) = (1, 0, 0, 1)$ es

$$\begin{aligned} JF^{-1}(F(P)) &= (JF)^{-1}(F(P)) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Si las ecuaciones $x + y^2 = u; \quad y + z^2 = v, \quad z + x^2 = w$ determinan a x, y, z como funciones dos veces diferenciables de (u, v, w), calcule $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ en el punto donde $x = y = z = 1;\ u = v = w = 2$.

Solución : Podemos escribir el sistema en la forma

$$\vec{0} \;=\; \vec{F}\,(x, y, z, v, v, w) \;=\; (\underbrace{x + y^2 - u}_{F_1},\ \underbrace{y + z^2 - v}_{F_2},\ \underbrace{z + x^2 - w}_{F_3}).$$

Por la Regla de Cramer,

$$\frac{\partial x}{\partial u} \;=\; -\,\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)/\partial(u, y, z)}{\partial(F_1, F_2, F_3)/\partial(x, y, z)}$$

donde

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)} \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 2z \\ 2x & 0 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 1 + 8xyz$$

y, análogamente,

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(u, y, z)} \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} -1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \;=\; -1.$$

De donde, $\dfrac{\partial x}{\partial u} \;=\; \dfrac{1}{1 + 8xyz}$.

Nota : Una forma alternativa de llegar al resultado anterior es derivar las identidades

$$x + y^2 - u \;=\; 0; \qquad y + z^2 - v \;=\; 0, \qquad z + x^2 - w \;=\; 0$$

con respecto a u teniendo en consideración que tanto x como y y z son funciones (implícitas) de u y luego, despejar del sistema obtenido, la incógnita $\frac{\partial x}{\partial u}$.

Ahora bien, derivando x_u nuevamente con respecto a u obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \;&=\; \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) \;=\; \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{1 + 8xyz}\right) \\ &=\; -\,\frac{1}{(1 + 8xyz)^2}\,(8x_u yz \;+\; 8xy_u z \;+\; 8xyz_u) \\ &=\; -\,\frac{8\,(x_u yz \;+\; xy_u z \;+\; xyz_u)}{(1 + 8xyz)^2} \end{aligned}$$

Tal como calculamos x_u tenemos que

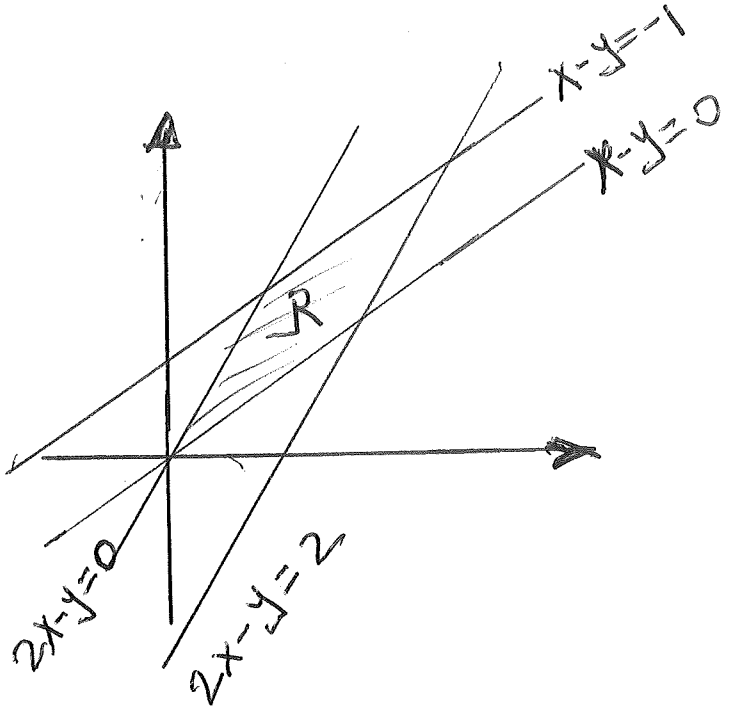
$$y_u = -\frac{1}{1+8xyz}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1+8xyz}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z \\ 2x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4xz}{1+8xyz}$$

$$z_u = -\frac{1}{1+8xyz}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial u} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1+8xyz}\begin{vmatrix} 1 & 2y & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2x}{1+8xyz}$$

Por tanto, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \dfrac{16x^2y - 8yz - 32x^2z^2}{(1+8xyz)^3} = -\dfrac{24}{9^3}$, en el punto dado.

(1)

La región de integración se muestra en la figura



Hacemos

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x - y \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = -u + v \\ y = -2u + v \end{cases}$$

y $R \longrightarrow R^* = \{(u,v) : -1 \le u \le 0 \; ; \; 0 \le v \le 2\}$

Entonces,

$$\iint_R xy\,dx\,dy = \iint_{R^*} (v-u)(v-2u) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

como $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$, obtenemos

$$\iint_R xy\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{-1}^0 (v^2 - 3uv + 2u^2)\,du\,dv$$

$$= \int_0^2 \left(v^2 + \frac{3v}{2} + \frac{2}{3}\right) dv = 7.$$

(2) Sea D_1 la proyección de D sobre plano YZ

D_1 es el triángulo acotado por los ejes Z, Y y la recta $\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Podemos escribir $D_1=\{(y,z): 0\le z\le 3;\ 0\le y\le 2-\frac{2}{3}z\}$

Para cada $(y,z)\in D_1$, $\quad 0\le x\le 1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}$

Así,
$$I=\int_0^3\int_0^{(2-\frac{2}{3}z)}\int_0^{(1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3})} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Si escribimos D_1 en el orden inverso,

$$D_1=\{(y,z): 0\le y\le 2;\ 0\le z\le 3-\tfrac{3}{2}y\}$$

Así,
$$I=\int_0^2\int_0^{(3-\frac{3}{2}y)}\int_0^{(1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3})} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

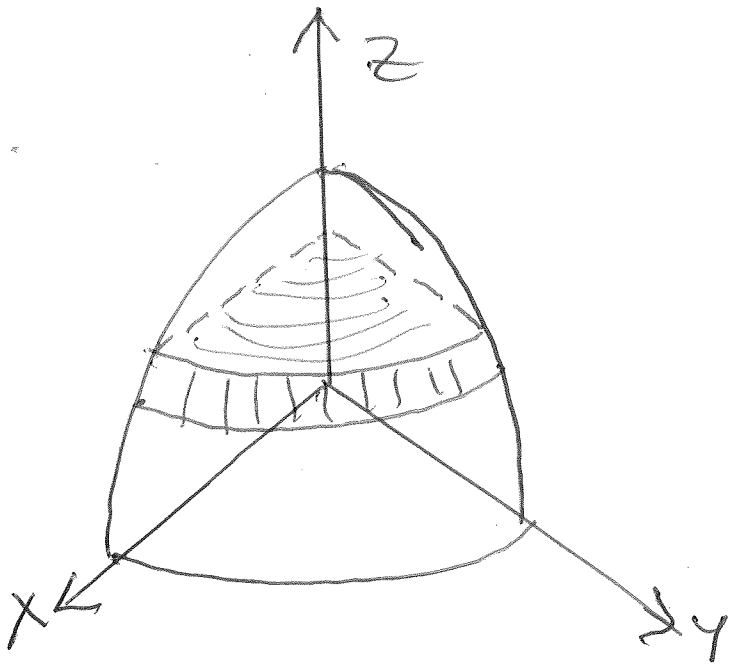
Por último, la proyección de D sobre plano XY es $D_2=\{(x,y): 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 2-2x\}$

Luego,
$$I=\int_0^1\int_0^{(2-2x)}\int_0^{(3-3x-\frac{3}{2}y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

(3) La figura muestra la región R de integración. La intersección de la esfera con plano $z=z_0$ produce

$x^2+y^2=-z_0^2+9$

r^2 en coords cilíndricas



En coords. <u>cilíndricas</u>

$$R=\{(r,\theta,z): 0\le\theta\le\tfrac{\pi}{2};\ 1\le z\le 2;\ 0\le r\le\sqrt{9-z^2}\}$$

y la densidad se convierte en

$$\delta(r,\theta,z)=3(r^2+z^2).$$

La masa total es, pues,

$$M=3\int_0^{\pi/2}\int_1^2\int_0^{\sqrt{9-z^2}}(r^2+z^2)\,r\,dr\,dz\,d\theta$$

$$=\frac{3\pi}{2}\underbrace{\int_1^2\left[\frac{(9-z^2)^2}{4}+\frac{z^2(9-z^2)}{2}\right]dz}_{439/30}$$

$$=\frac{439}{2}\pi$$

(4) Es sabido que el campo $\vec{F} = \vec{\nabla}(-f)$

donde $f(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $(\text{en } \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\})$

Luego, las integrales desde $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ se calculan por

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla} f(x,y,z) \cdot d\vec{r}$$

$$= f(P_2) - f(P_1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$= \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

(depende sólo de R_1 y R_2)

(5) Por el Teorema fundamental,

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,2)} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(1,1,2) - \underbrace{f(0,0,0)}_{5}$$

Para conocer la integral debemos buscar una trayectoria apropiada desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,2)$
Hacemos trayecto por segmentos

$$(0,0,0) \xrightarrow[\gamma_1]{} (1,0,0) \xrightarrow[\gamma_2]{} (1,1,0) \xrightarrow[\gamma_3]{} (1,1,2)$$

γ_1: $x=t$; $y=z=0$, $0 \le t \le 1$

$$\int_{\gamma_1} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_0^1 0\,dt = 0$$

γ_2: $x=1$, $y=t$, $z=0$, $0 \le t \le 1$

$$\int_{\gamma_2} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_0^1 0 \cdot dt = 0$$

γ_3: $x=1$, $y=1$, $z=t$ $\quad 0 \le t \le 2$

$$\int_{\gamma_3} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_0^2 1 \cdot e^{1^2} dt = 2e$$

$\therefore$ $f(1,1,2) = 2e+5$ //

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
23 de junio de 2016.

MAT–1630 - CALCULO III
EXAMEN

1. Si $z^3 - xz - y = 0$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ cuando $(x, y, z) = (-1, 0, -1)$.

   Solución:
   Sea $f(x, y, z) = z^3 - xz - y$. Calculamos las primeras y algunas segundas derivadas parciales de $f(x, y, x)$:

   $$f_x(x, y, x) = -z,\ f_y(x, y, x) = -1,\ f_z(x, y, x) = 3z^2 - x,$$
   $$f_{xy}(x, y, z) = 0,\ f_yz(x, y, z) = 0,\ f_{zz}(x, y, z) = 6z,\ f_{xz}(x, y, z) = -1.$$

   Luego, en el punto $(-1, 0 - 1)$, nos quedan

   $$f_x(-1, 0 - 1) = 1,\ f_y(-1, 0 - 1) = -1,\ f_z(-1, 0 - 1) = 4$$
   $$f_{xy}(-1, 0 - 1) = 0,\ f_yz(-1, 0 - 1) = 0,\ f_{zz}(-1, 0 - 1) = -6,\ f_{xz}(-1, 0, -1) = -1.$$

   Como $f_z((-1, 0-1)) \neq 0$ podemos utilizar el teorema de la función implicita para despejar z en función de x, y. Además como $f(x, y, z)$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, z también lo será. Luego, por regla de la cadena nos queda

   $$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z(x, y)) = 0 \Rightarrow f_x + f_z z_x = 0 \Rightarrow z_x(-1, 0) = -\frac{1}{4},$$
   $$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z(x, y)) = 0 \Rightarrow f_y + f_z z_y = 0 \Rightarrow z_x(-1, 0) = \frac{1}{4}.$$

   Así,

   $$\frac{\partial}{\partial y}\left(f_x + f_z z_x = 0\right) \Rightarrow f_{xy} + f_{xz} z_y + z_x\left(f_{zy} + f_{zz} z_x\right) + f_z z_{xy} = 0 \Rightarrow z_{xy}(-1, 0) = \frac{5}{32}.$$

2. Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 4 + xy - x^2 - y^2$ sobre el conjunto $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   Solución:
   Calculamos el gradiente y la matriz Hessiana de $f(x, y)$:

   $$\nabla f(x, y) = (y - 2x,\ x - 2y),\ H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Calculamos los puntos críticos de $f(x, y)$ en D,

   $$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \in D.$$

Aplicamos el criterio del Hessiano para el punto crítco $(0,0)$,

$$f_{xx}(0,0) = -2 < 0,\ \det\left(H(f)(0,0)\right) = 4 - 1 = 3 > 0\,.$$

Así $f(0,0) = 4$ es un máximo local de $f(x,y)$ en D.
Ahora buscamos puntos críticos en la frontera de D, para esto utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange:
Notamos que la condición de frontera viene por la función $g(x,y) = x^2 + y^2$, así

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = \lambda 2x \\ x - 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x(2 + 2\lambda) = 0 \\ x - y(2 + 2\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Notar que el sistema tendrá solución si

$$(2 + 2\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}.$$

Así los puntos que aparecen con los valores de λ son:

$$\lambda = -\frac{1}{2} : \begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda = -\frac{3}{2} : \begin{cases} y + x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Evaluamos en $f(x,y)$ para comparar los valores críticos:

$$f(0,0) = 4,\ f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4},\ f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}.$$

Por tanto el máximo y el mínimo de $f(x,y)$ son 4 y $\frac{13}{4}$ respectivamente.

3. Sea C la curva dada por $x^2 + y^2 = 1, x \leq 0$ orientada positivamente. Encontrar el trabajo realizad por la fuerza

$$F(x,y) = \left(y\frac{x-2}{1-x}, \ln(1-x)\right)$$

al mover una partícula a lo largo de la curva C.
Solución:
Debemos calcular

$$\int_C F.$$

Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1,\ x \leq 0\}$ la regíon encerrada por la curva C. Notar que

$$P(x,y) = y\frac{x-2}{1-x},\ Q(x,y) = \ln(1-x)$$

son de clase C^∞ en D, así podemos aplicar el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por $F(x,y)$ sobre C.

$$\int_C F = \iint_D Q_x - P_y dxdy = \iint_D \frac{-1}{1-x} - \frac{x-2}{1-x} dxdy = -\iint_D dxdy = -\frac{\pi}{2}.$$

4. Sea S la superficie definida por $z = 5 - x^2 - y^2$ con $z \geq 1$, orientada conel vector normal unitario apuntando hacia abajo. Considere el campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(e^z + 1, y, y\cos(x^2)\right).$$

Calcule $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA$.

Solución:

Como F es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ podemos aplicar el teorema de Stokes. Notar que la frontera de S es la curva $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$, denotamos a esta curva $\gamma(t)$ orientada negativamente. Luego,

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA = \int_\gamma F &= -\int_0^{2\pi} \left\langle F \circ \gamma, \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} e+1 \\ \sin(t) \\ \sin(t)\cos(\cos(t)^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= -\int_0^{2\pi} -2(e+1)\sin(t) + \sin(2t) dt \\
&= -2(e+1)(\cos(2\pi) - \cos(0)) + \frac{\cos(4\pi) - \cos(0)}{2} = 0.
\end{aligned}$$

En otra notación : Si $\vec{r}(t) = (2\cos t,\, -2\,\text{sen}\, t,\, 1)\,;\ 0 \leq t \leq 2\pi$ es la parametrización de la curva C que es frontera de S, entonces la integral es

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(2\cos\, t, -2\,\text{sen}\, t, 1\right) \cdot (-2\,\text{sen}\, t, -2\cos\, t, 0)\, dt \\
&= -2\int_0^{2\pi} \left(e+1, -2\,\text{sen}\, t, -2\,\text{sen}\, t, \cos\left(4\cos^2 t\right)\right) \cdot (-2\,\text{sen}\, t, -2\cos\, t, 0)\, dt \\
&= -2\int_0^{2\pi} \left[(e+1)\,\text{sen}\, t + 2\,\text{sen}\, t\cos\, t\right] dt
\end{aligned}$$

etc.

Método alternativo : "Cerramos" la superfice de integración agregando el disco $S_1 : x^2 + y^2 = 4,\ z = 1$ con normal hacia arriba. Entonces, aplicando el Teorema de la divergencia al sólido $\Omega,$ envuelto por $S \cup S_1,$:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA + \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot dA = \iiint_\Omega \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})\, dV$$

Pero, por la identidad $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$ obtenemos

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dA = \iint_{-S_1} (\nabla \times F) \cdot dA$$

etc.

5. Calcule el flujo del campo campo $\overrightarrow{F} = (z \arctan(y^2),\ z^3 \ln(x^2+1),\ z)$ a través de la porción del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está encima del plano $z = 1,$ y con la orientación hacia arriba.
<u>Solución:</u>
Notar que el campo F es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, así podemos utilizar el teorema de la divergencia. Sea V el volumen que encierra el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 1$.
Notar que el flujo de F sobre la superficie S satisface a

$$\iint_S F \cdot dA - \iint_D F \cdot dA + = \iiint_V \operatorname{div}(F) dV, \tag{1}$$

donde D es el disco de radio 1 centrado en $(0, 0, 1)$ en el plano $z = 1$ orientado con el normal apunta hacia afuera.
Notar que $\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = 1$, por tanto calculamos el volumen de V y el flujo de F sobre el disco D.

$$\operatorname{Vol}(V) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} r dr dz d\theta = \pi \int_1^2 2 - z dz = \frac{\pi}{2}.$$

Parametrizamos el disco con $\varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1)$, luego

$$\begin{aligned} \iint_D F \cdot dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle F \circ \varphi, \varphi_r \times \varphi_\theta \rangle\, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\langle F \circ \varphi, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\rangle dr d\theta \\ &= \textstyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\iint_S F \cdot dA = \operatorname{Vol}(V) + \iint_D F \cdot dA = \frac{3\pi}{2}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
10 de Abril de 2017

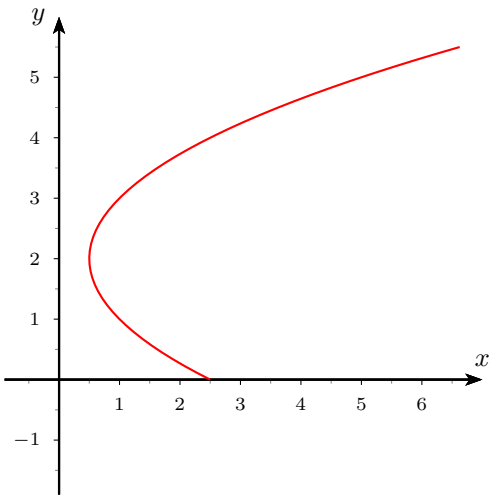
MAT1630 ⋆ Cálculo III
Solución Interrogación 1

1. Sea C la curva de todos los puntos (x, y) en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen lo siguiente: [distancia entre (x, y) y el eje y]= [distancia entre (x, y) y el punto $(1, 2)$]. Escriba de manera paramétrica la curva C y bosquéjela.

   Solución. Notemos que

   $$\begin{aligned} C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, [\text{distancia entre } (x,y) \text{ y el eje } y] = [\text{distancia entre } (x,y) \text{ y el punto } (1,2)]\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x = \frac{y^2 - 4y + 5}{2}\} \end{aligned}$$

   Es una parábola, y su bosquejo está dado por:



   Y una parametrización puede ser

   $$x(t) = \frac{t^2 - 4t + 5}{2}, \quad y(t) = t, \quad t \in [0, +\infty[.$$

2. Si C es un curva plana parametrizada por $(2\cos^3(\theta), 2\,\text{sen}^3(\theta)), \theta \in [0, \pi/2]$, encuentre el área de la superficie obtenida al rotar la curva C en torno al eje x.

   Solución. Calculamos la norma del vector tangente a la curva dada,

   $$\begin{aligned} T(\theta) &= 2\left(-3\cos(\theta)^2 \sin(\theta), 3\sin(\theta)^2 \cos(\theta)\right). \\ \|T(\theta)\| &= 6|\sin(\theta)\cos(\theta)|. \end{aligned}$$

   Notamos que la distancia de la curva con respecto al eje x corresponde a $2\sin(\theta)^3$.
   Por tanto el área de la superficie de revolución que se genera al rotar la curva con respecto al eje x es

   $$A = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(\theta)^3 6|\sin(\theta)\cos(\theta)| d\theta = 24\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^4 \cos(\theta) d\theta = 24\pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{24\pi}{5}.$$

3. *a*) Considere la curva $C = \{(x, 1/x) : x \geq 1\}$. Sea V el sólido obtenido al rotar el área bajo la curva C en torno al eje x. ¿Es el volumen de este sólido finito o infinito?. Sea S la superficie de revolución obtenida al rotar la curva C en torno al eje x. ¿Es el área de esta superficie finita o infinita?. Justifique su respuesta.

b) Sea C la curva en polares parametrizada por $r = e^{-\theta}, \theta \geq 0$. Bosqueje la curva. ¿Es el largo de esta curva finito o infinito? Si es infinito demuéstrelo, si es finito calcule el largo de la curva.

Solución:

a) Considerando la curva parametrica dada, con parámetro x, el volumen de el sólido V es:

$$\text{Vol}(V) = \int_C \pi y^2 \, dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{R\to\infty} \pi \int_1^R \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1.$$

Por otro lado, el elemento de arco de la curva C es

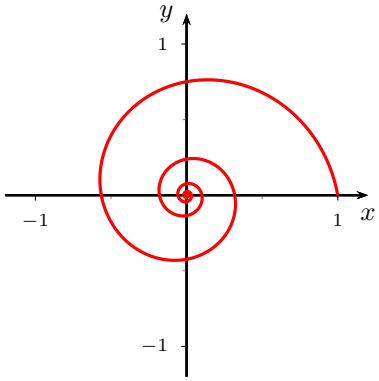
$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt = \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}dx.$$

Y el area de la superficie de rotación S es:

$$\begin{aligned} Area(S) &= \int_C 2\pi y \, ds = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx \\ &\geq 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi \int_1^R \frac{1}{x} \, dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi \ln(R) - 0 = \infty \end{aligned}$$

Donde la desigualdad se cumple ya que $\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$, en particular en todo el intervalo de integración. Por lo tanto el area de S es infinita.

b) La curva C es un espiral que comienza en $(1, 0)$ y al aumentar el ángulo θ el radio disminuye hacia 0.



Para calcular el largo calculamos el elemento de arco que en coordenadas polares es

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\theta = \sqrt{e^{-2\theta/2\pi} + \frac{e^{-2\theta/2\pi}}{4\pi^2}} \, d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \, e^{-\theta/2\pi} \, d\theta$$

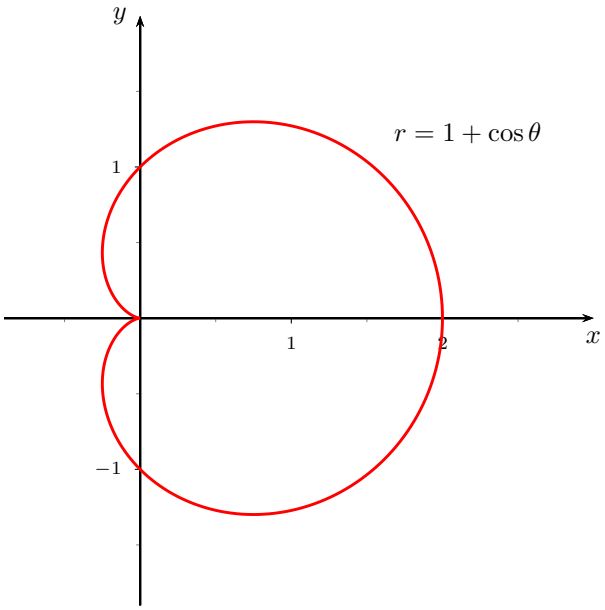
Así el largo de curva es

$$L(C) = \int_C ds = \int_0^\infty \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \, e^{-\theta/2\pi} \, d\theta = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \, e^{-\theta/2\pi} \, d\theta$$

$$= \lim_{R\to\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \, \frac{e^{-R/2\pi}}{2\pi} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}} \, \frac{e^0}{2\pi} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}}{2\pi}.$$

4. Bosqueje la curva plana parametrizada en polares como $r = 1 + \cos(\theta), \theta \in [0, 2\pi]$ y calcule el área encerrada por esta curva.

Solución. La curva es una cardiode, la gráfica de la curva se muestra a continuación.



Ahora bien, el área encerrada por la curva es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[1+\cos\theta]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta)\right)_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi\,. \end{aligned}$$

5. *a*) (4pts) Encuentre una representación paramétrica de la curva obtenida al intersectar el casquete esférico de radio 2 centrado en el origen, con la superficie parametrizada por $\{(t\cos(t), t\,\mathrm{sen}(t), z) : t > 0, z > 0\}$.

   b) (2pts) Calcule el vector tangente a la curva de a) en el punto $(0, \pi/2, \sqrt{4 - \pi^2/4})$.

Solución.

a) Los puntos $P(x, y, z)$ de la curva deben satisfacer simutaneamente
$x = t\cos(t),\ y = t\,\mathrm{sen}(t),\ z = z$ con $t > 0,\ z > 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
Una parametrización obvia es $\overrightarrow{r}(t) = \left(t\cos(t),\ t\,\mathrm{sen}(t),\ \sqrt{4 - t^2}\right)$.
La curva baja sobre el casquete esférico desde $(0, 0, 2)$ hasta $(2\cos(2), 2\,\mathrm{sen}(2), 0)$, sin incluir los extremos, por lo tanto $t \in (0, 2)$.

b) Para esta parametrización el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}, \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}\right)$ se obtiene para $t = \frac{\pi}{2}$.

Se tiene que $\overrightarrow{r}'(t) = \left(\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t) + t\cos(t), -\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\right)$,

por lo tanto $\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, 1, \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}}\right)$ es un vector tangente en el punto dado.

6. Reparametrizar la curva $r(t) = (\cosh(t), \text{sen}(t), \cos(t))$ respecto a la longitud de arco medida desde $(1, 0, 1)$ en la dirección en que se incrementa t.

Solución. Tenemos que

$$r'(t) = (\sinh(t), \cos(t), -\sin(t)), \quad \|r'(t)\| = \sqrt{\sinh^2(t) + 1},$$

como $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ y $\cosh(t) \geq 0$, obtenemos que $\|r'(t)\| = \cosh(t)$.
Luego, como $r(0) = (1, 0, 1)$, calculamos la función longitud de arco:

$$s(t) = \int_0^t \|r'(u)\| du = \int_0^t \cosh(u) du = \sinh(t).$$

Así,

$$t(s) = \sinh^{-1}(s) = \operatorname{arc}\sinh(s) = \ln(s + \sqrt{s^2 + 1}).$$

Por lo tanto, la parametrización por longitud de arco o la arcoparametrización de la curva es:

$$r(s) = (\cosh(\operatorname{arc}\sinh(s)), \sin(\operatorname{arc}\sinh(s)), \cos(\operatorname{arc}\sinh(s))), \quad s \in [0, \infty).$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
11 de Mayo de 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Pauta Interrogación 2

P1.- Encuentre un vector tangente unitario, un vector normal unitario, un vector binormal unitario, la curvatura y la torsión en el punto $(2,0,4)$ de la curva dada por:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

Solución:

Primero, parametrizamos la curva:

$$x = y + 2, \text{ entonces} \quad (y+2)^2 + y^2 - z = 0, \quad z = 2y^2 + 4y + 4.$$

Entonces,

$$r(t) = (t+2, t, 2t^2 + 4t + 4), \ t \in \mathbb{R}.$$

Así,

$$r(0) = (2,0,4), \quad r'(t) = (1,1,4t+4), \quad r''(t) = (0,0,4), \quad r'''(t) = (0,0,0).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{r'(0)}{\|r'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{18}}(1,1,4), \\ B(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \quad \text{(es el vector normal al plano } x - y = 2 \text{ normalizado)}, \\ N(0) &= B(0) \times T(0) = \frac{1}{3}(2,2,-1), \\ k(0) &= \frac{\|r'(0) \times r''(0)\|}{\|r'(0)\|^3} = \frac{2}{27}, \\ \tau(0) &= 0 \quad \text{(es una curva plana)}. \end{aligned}$$

También se pudo haber encontrado $N(0), B(0), \tau(0)$ usando las fórmulas:

$$N(0) = \frac{T'(0)}{\|T'(0)\|}, \quad B(0) = T(0) \times N(0), \quad \tau(0) = \frac{(r'(0) \times r''(0)) \cdot r'''(0)}{\|r'(0) \times r''(0)\|}.$$

P2.- Suponga que una curva γ con curvatura κ no nula y torsión τ satisface:

"Todas las rectas tangentes forman un ángulo constante θ_0 con un vector v fijo".

Muestre que $\dfrac{\tau}{\kappa}$ es constante.

Solución:

Por hipótesis tenemos que $T \cdot v = ||v|| \cos(\theta_0)$. Derivando esta relación obtenemos

$$\kappa N \cdot v + T \cdot 0 = 0,$$

por tanto $N \cdot v = 0$. Luego v no posee componente normal con respecto al tiedro de Frenet Serret de γ. Por tanto $B \cdot v = \pm ||v|| \sin(\theta_0)$.

Derivando $N \cdot v = 0$ obtenemos que

$$(-\kappa T + \tau B) \cdot v + N \cdot 0 = 0 \Rightarrow \kappa \cos(\theta_0) = \pm \tau \sin(\theta_0).$$

Por tanto $\dfrac{\tau}{\kappa} = \pm \cot(\theta_0)$.

P3.- a) Un alambre de longitud $L = \sqrt{6}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ se dobla con la forma de la espiral cónica

$$x(t) = t\,\cos(t), \quad y = t\,\text{sen}(t), \quad z(t) = t$$

desde el origen hasta el punto $P(2\cos(2), 2\,\text{sen}(2), 2)$. Encuentre la altura de su centroide.

b) Si C es el triángulo con vértices el origen, el punto $(4,0)$ y el punto $(0,3)$ recorrido en sentido antihorario, calcule $\displaystyle\int_C (x^2+xy)\,ds$.

Solución:

a) Buscamos

$$\overline{z} = \frac{\int_\lambda z\,ds}{L} = \frac{\int_0^2 z\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt}{L} \qquad \lambda(t) = (t\,\cos(t), t\,\text{sen}(t), t)$$

$x'^2+y'^2+z'^2 = (\cos(t)-t\,\text{sen}(t))^2 + (\text{sen}(t)+t\cos(t))^2 + 1 = 2+t^2$, por lo tanto

$$\overline{z} = \frac{\int_0^2 t\sqrt{2+t^2}dt}{L} = \frac{\frac{2}{3}(3\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

b)

$$\int_C (x^2+xy)\,ds = \int_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} (x^2+xy)\,ds = \int_{\lambda_1}(x^2+xy)\,ds + \int_{\lambda_2}(x^2+xy)\,ds + \int_{\lambda_3}(x^2+xy)\,ds$$

Usamos las parametrizaciones

$$\lambda_1(t) = (0, 3-t), 0\le t\le 3, \quad \lambda_2(t) = (t,0), 0\le t\le 4, \quad \lambda_3(t) = (4-4t, 3t), 0\le t\le 1$$

$\int_{\lambda_1}(x^2+xy)\,ds = \int_0^3 0\,dt = 0$, $\quad \int_{\lambda_2}(x^2+xy)\,ds = \int_0^4 t^2\,dt = \frac{64}{3}$
$\int_{\lambda_3}(x^2+xy)\,ds = \int_0^1 (4-4t)(4-t)\sqrt{4^2+3^2}\,dt = \frac{110}{3}$ por lo tanto $\displaystyle\int_C (x^2+xy)\,ds = \frac{174}{3}$

P4.- Halle el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y,z) = (2x-y+z, x+y-z^2, 3x-2y+4z)$ al desplazar una partícula en el sentido antihorario alrededor de la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1, z = 0\,.$$

Solución. Al parametrizar la elipse para que la partícula recorra en sentido antihorario, se obtiene la curva parametrizada

$$C: \qquad \alpha(t) = (2+2\cos(t), 3+3\,\text{sen}(t), 0)\,, \quad t\in[0,2\pi]\,.$$

Luego, se tiene $\alpha'(t) = (-2\,\text{sen}(t), 3\cos(t), 0)$. Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza F es

$$\begin{aligned} W &= \int_C F(x,y,z)\cdot d\alpha(t) = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-2\,\text{sen}(t) + \cos(t)\,\text{sen}(t) + 15\cos(t) + 6]\,dt = 12\pi\,. \end{aligned}$$

P5.- Calcule la integral del campo vectorial

$$F(x,y,z) = (ye^{xy} + 2xe^y, xe^{xy} + x^2e^y, 2ze^z + z^2e^z)$$

sobre la curva $r(t) = (2\cos(t), \sin^2(t), \cos(2t))$, con $0\le t\le\pi$.

Solución: Suponiendo que el campo vectorial F es conservativo, vamos a buscar su potencial. Este debe cumplir que

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) = ye^{xy} + 2xe^y \text{ de donde } f(x,y,z) &= e^{xy} + x^2y + g(y,z) \\ xe^{xy} + x^2e^y + g_y(y,z) = f_y(x,y,z) = xe^{xy} + x^2e^y \text{ de donde } g(y,z) &= h(z) \\ h_z(z) = f_z(x,y,z) = 2ze^z + z^2e^z \text{ de donde } h(z) &= z^2e^z + C \end{aligned}$$

Por lo tanto un potencial es $f = e^{xy} + x^2e^y + z^2e^z$ y como este existe F es conservativo. Integramos usando el Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de linea, usando que r es una curva entre los puntos $r(0) = (2, 0, 1)$ y $r(\pi) = (-2, 0, 1)$.

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = f(r(\pi)) - f(r(0)) = f(-1, 0, 1) - f(1, 0, 1) = 0$$

P6.- Considere el siguiente campo vectorial

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2} \right).$$

a) Calcule $\int_{C_1} F \cdot dr$, donde $C_1 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$.

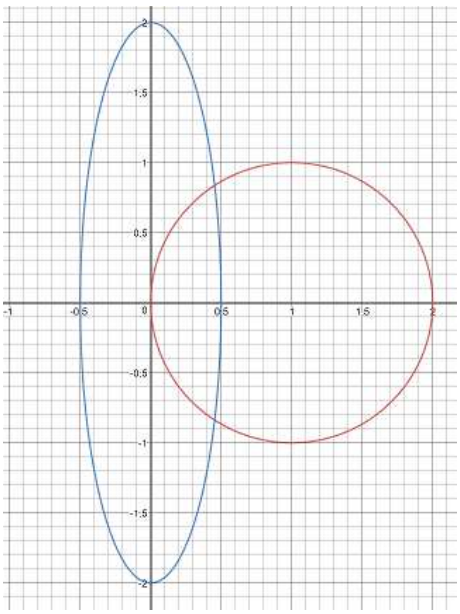
b) Calcule $\int_{C_2} F \cdot dr$, donde $C_2 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^2 + y^2 = 4\}$.

Solución:

Primero notemos que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, específicamente:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2}.$$

Pero no podemos decir que es conservativo en $\mathbb{R}^2$, ya que F no está definido en $(1, 0)$. Por lo tanto, depende de qué región encierre la curva correspondiente.



a) Como C_1 encierra el punto $(1, 0)$, entonces no podemos usar que el campo sea conservativo. Luego, una parametrización de C_1 es

$$r_1(t) = (\cos(t) + 1, \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Así, calculamos:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(r_1(t)) \cdot r_1'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin(t), -\cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

b) Como C_2 no encierra al punto $(1, 0)$, entonces el campo F es conservativo en esta región. Por lo tanto,

$$\int_{C_2} F \cdot dr = 0.$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
9 de Junio de 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Pauta Interrogación 3

P1.- Sea $F(x,y) = (2xy^2 + 1, 2x^2y + 3x)$ campo vectorial. Calcule $\int_C F \cdot dr$, donde C consiste en tres segmentos de recta que van desde $(3,0)$ a $(3,2)$; desde $(3,2)$ a $(1,4)$ y desde $(1,4)$ a $(1,0)$.

Solución: Primero notar que para usar el Teorema de Green es necesario cerrar la curva con un segmento de recta desde $(1,0)$ a $(3,0)$. Denotemos a esta curva como C_1.

Entonces, usando el Teorema de Green tenemos que:

$$\int_C F \cdot dr + \int_{C_1} F \cdot dr = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Luego, calculamos $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3$, entonces

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = 3Area(D) = 3 \cdot \frac{4+2}{2} \cdot 2 = 18.$$

Además, C_1 la podemos parametrizar por $r(t) = (t, 0),\ t \in [1,3]$, entonces

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_1^3 (1, 3t) \cdot (1, 0) dt = 2.$$

Por lo tanto,

$$\int_C F \cdot dr = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA - \int_{C_1} F \cdot dr = 16.$$

P2.- Sea $F(x,y,z) = (x,y,z)r^2$ donde $r = ||(x,y,z)||$ y sea g una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Calcule $\text{rot}(\text{div}(F)\nabla g)$ en término de las derivadas parciales de g.

Solución:
Primero notamos que

$$\text{rot}(\text{div}(F)\nabla g) = \text{div}(F)\text{rot}(\nabla g) + \nabla \text{div}(F) \times \nabla g. \tag{1}$$

Como $\text{rot}\,(\nabla g) = 0$ y

$$\begin{aligned} \text{div}(r^2(x,y,z)) &= r^2 \text{div}\,((x,y,z)) + \nabla r^2 \cdot (x,y,z) \\ &= 3r^2 + 2\,(x,y,z) \cdot (x,y,z) \\ &= 5r^2. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\nabla \text{div}(F) = \nabla 5r^2 = 10(x,y,z).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{div}(F)\nabla g) &= 10(x,y,z) \times (g_x, g_y, g_z) \\ &= 10\,(yg_z - zg_y, zg_x - xg_z, xg_y - yg_x)\,. \end{aligned}$$

P3.- Considere la superficie S obtenida al rotar la curva $c(t) = (t^2 + 1, t^3)$, $t \in [0,3]$, en torno al eje vertical (el eje-y).

a) Dé una parametrización de S.

b) Encuentre el/los puntos donde el plano tangente a S es paralelo al plano $3x + 3y + 2\sqrt{2}z = 0$.

Solución: En esta pregunta se consideraran las dos siguientes interpretaciones como correctas.
Interpretación 1: El eje de rotación se denota en $\mathbb{R}^3$ como el eje z.

a) S es una superficie de revolución en torno al eje vertical, con distancia al eje $t^2 + 1$ y altura t^3. Esta tiene parametrización:

$$r(t, \theta) = ((t^2 + 1)\cos\theta, (t^2 + 1)\sin\theta, t^3)$$

con $t \in [0, 3]$ y $\theta \in [0,2\pi)$.

b) Usamos la parametrización para calcular un vector normal, calculando: $r_t(t, \theta) = (2t\cos\theta, 2t\sin\theta, 3t^2)$ y $r_\theta(t, \theta) = (-(t^2 + 1)\sin\theta, (t^2 + 1)\cos\theta, 0)$ luego

$$N = r_t \times r_\theta = (-3t^2(t^2 + 1)\cos\theta, -3t^2(t^2 + 1)\sin\theta, 2t(t^2 + 1)) = -t^2(t^2 + 1)(3\cos\theta, 3\sin\theta, -2/t).$$

Si el plano tangente es paralelo al plano $3x + 3y + 2\sqrt{2}z = 0$, su vector normal tiene que ser paralelo a $(3, 3, 2\sqrt{2})$. Es decir, tiene que existir $\lambda \neq 0$ tal que:

$$\begin{aligned} 3\cos\theta &= 3\lambda \\ 3\sin\theta &= 3\lambda \\ -2/t &= 2\sqrt{2}\lambda. \end{aligned}$$

Los $\theta \in [0, 2\pi), t \in [0, 3]$ donde esta ecuación se satisface determina los puntos buscados (en este caso son $\theta = 5\pi/4$ y $t = 1$).

Interpretación 2: El eje de rotación se denota en $\mathbb{R}^3$ como el eje y.

a) S es una superficie de revolución en torno al eje y, con distancia al eje $t^2 + 1$ y coordenada y igual a t^3. Esta tiene parametrización:

$$r(t, \theta) = ((t^2 + 1)\cos\theta, t^3, (t^2 + 1)\sin\theta)$$

con $t \in [0, 3]$ y $\theta \in [0,2\pi)$.

b) Usamos la parametrización para calcular un vector normal, calculando: $r_t(t, \theta) = (2t\cos\theta, 3t^2, 2t\sin\theta)$ y $r_\theta(t, \theta) = (-(t^2 + 1)\sin\theta, 0, (t^2 + 1)\cos\theta)$ luego

$$N = r_t \times r_\theta = t^2(t^2 + 1)(3\cos\theta, -2/t, 3\sin\theta).$$

Si el plano tangente es paralelo al plano $3x + 3y + 2\sqrt{2}z = 0$, su vector normal tiene que ser paralelo a $(3, 3, 2\sqrt{2})$. Es decir:, tiene que existir $\lambda \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} 3\cos\theta &= 3\lambda \\ -2/t &= 3\lambda \\ 3\sin\theta &= 2\sqrt{2}\lambda. \end{aligned}$$

Los $\theta \in [0, 2\pi), t \in [0, 3]$ donde esta ecuación se satisface determina los puntos buscados (en este caso son $\theta = (\arctan(\sqrt{8}/3) + \pi)$ y $t = 9/(2\sqrt{17})$).

P4.- Calcule $\iint_S (x^2 + y^2)dS$ donde S es la superficie del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ entre $z = 0$ y $z = 3$.

Solución La superficie del cono es el gráfico de una función $z = f(x, y) = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, entonces podemos elegir la parametrización $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

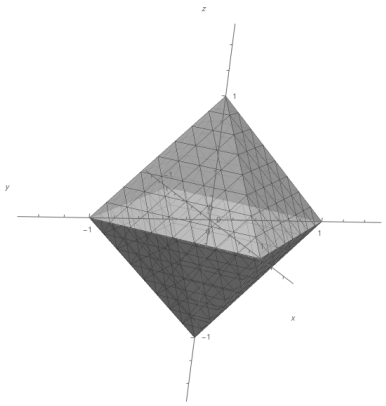
donde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 3\}$ es la proyección del cono sobre el plano XY. Tenemos que

$$\phi_x \times \phi_y = (-f_x, -f_y, 1) = \left(-\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) .$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2+y^2)dS &= \iint_S (x^2+y^2)\sqrt{1 + \frac{3x^2}{x^2+y^2} + \frac{3y^2}{x^2+y^2}}dydx \\ &= 2\iint_\Omega (x^2+y^2)dydx \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cdot r dr d\theta = 9\pi . \end{aligned}$$

P5.- Calcule el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie $|x| + |y| + |z| = 1$.



La superficie P es la figura de 8 caras (denotadas cada una por C_i, con $i = 1, 2..., 8$) mostrada en la siguiente imagen. En principio se deberían hallar 8 integrales de superficie, una por cada cara, pero por simetría el flujo por cada una de ellas es el mismo. Consideremos solo la cara que esta en el primer octante C_1 la cual puede ser parametrizada por

$f(x,y) = (x, y, 1-x-y)$, cuyo dominio es $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$

Como $f_x(x,y) = (1,0,-1)$ y $f_y(x,y) = (0,1,-1)$, entonces

$$f_x(x,y) \times f_y(x,y) = (1,1,1).$$

Finalmente el flujo a través de la cara del primer octante esta dado por

$$\begin{aligned} \iint_{C_1} F \cdot dS &= \iint_S F(f(x,y)) \cdot f_x(x,y) \times f_y(x,y) dA \\ &= \iint_S (x, y, 1-x-y) \cdot (1,1,1) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} dydx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto el flujo total esta dado por

$$\iint_P F \cdot dS = \sum_{i=1}^{8} \iint_{C_i} F \cdot dS = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

P6.- Sea C una curva en $\mathbb{R}^2$ cerrada, simple, orientada en sentido antihorario, parametrizada por $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Se define el número de giros de C con respecto al punto $p = (0, 1)$ (no situado sobre la curva C) como:

$$W(C, p) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{xdy - (y-1)dx}{x^2 + (y-1)^2}.$$

a) Demuestre que $W(C, p) = 0$ si p está en la región exterior a C.

b) Demuestre que $W(C, p) = 1$ si p está en la región interior a C.

Solución: Notar que se está analizando el campo vectorial

$$F(x, y) = \left(\frac{-(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} \right).$$

Así, tenemos que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

a) Si p está en la región exterior a C, eso quiere decir que F es conservativo en la región que encierra C, por lo que

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \frac{xdy - (y-1)dx}{x^2 + (y-1)^2} = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = 0.$$

Por lo tanto, $W(C, p) = 0$.

b) Si p está en la región interior a C, entonces sea C_ε el círculo centrado en p de radio ε orientada en sentido antihorario. Entonces, usando el teorema de Green, tenemos que:

$$\int_C F \cdot dr - \int_{C_\varepsilon} F \cdot dr = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = 0.$$

Así, parametrizamos C_ε como $r(t) = (\varepsilon \cos(t), \varepsilon \operatorname{sen}(t) + 1), \quad t \in [0, 2\pi]$, y calculamos

$$\begin{aligned} \int_C \frac{xdy - (y-1)dx}{x^2 + (y-1)^2} &= \int_{C_\varepsilon} F \cdot dr \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \cos^2(t) + \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2(t)}{\varepsilon^2} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $W(C, p) = 1$.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Pauta del Examen

Importante: Pueden haber formas de resolver los problemas que no estan indicadas en esta pauta, si la respuesta esta resuelta de manera correcta ocupando materia del curso eso también puede obtener máximo puntaje.

P1.- Sea γ el triangulo cuyos lados se forman al intersectar el plano $2x + y + 2z = 2$ con los planos XY, YZ y XZ, en el primer octante. Calcule la integral de linea de

$$F = \left(x + y^2, y + z^2, z + x^2\right)$$

sobre la curva γ orientada en sentido antihorario.

Solución:

Notamos que la superficie S dada por el gráfico de la función $z(x, y) = 1 - x - \frac{y}{2}$ con $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2 - 2x]$ satisface $\partial S = \gamma$.
Aplicamos el teorema de sotke para calcular la integral de línea del campo F sobre γ.

$$\phi(x, y) = \left(x, y, 1 - x - \frac{y}{2}\right) \to \phi_x \times \phi_y = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$$
$$\text{Rot}(F) = -2\,(z, x, y) \to \text{Rot}(F) \circ \phi = -2\left(1 - x - \frac{y}{2}, x, y\right)$$
$$\text{Rot}(F) \circ \phi \cdot \phi_x \times \phi_y = x - y - 2.$$
$$\int_\gamma F = \iint_S \text{Rot}(F) \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2-2x} x - y - 2\, dydx = -\frac{7}{3}.$$

P2.- Calcule el flujo hacia arriba del campo campo $F = \left(-2zx, z, z^2\right)$ a través de la porción del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 4$ que está encima del plano $z = 2$.

Solución:

Sea D un disco en el espacio contenido en el plano $z = 2$ centrado en $(0, 0, 2)$ y de radio $\sqrt{2}$. Si S denota la porción del paraboloide y U el sólido encerrado por $S \cup D$, tenemos que por el teorema de la divergencia

$$\iint_S F \cdot dS + \iint_D F \cdot dS = \iiint_U \text{div}(F) dV,$$

es decir

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_U \text{div}(F) dV - \iint_D F \cdot dS.$$

Notamos que $\text{div}(F) = 0$ y calculamos con orientación exterior el flujo

$$\iint_D F \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -4r\cos(\theta) \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} r dr d\theta = -8\pi \int_0^{\sqrt{2}} r dr = -8\pi.$$

Por tanto el flujo de F sobre S es 8π.

P3.- Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $\text{div}(\nabla f) = 0$.

a) Muestre que $\int_{C_r} \nabla f \cdot N ds = 0$, donde C_r es el círculo centrado en el origen de radio r y N es su vector normal (apuntando hacia afuera).

b) Muestre que

$$\int_{C_r} \nabla f \cdot N ds = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt.$$

c) Usando lo anterior, demuestre que

$$f(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R\cos(t), R\,\text{sen}(t)) dt.$$

Ayuda: Considere $\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt dr$.

Solución:

a) Si D_r es el disco centrado en el origen y de radio r, usando el Teorema de la divergencia en el plano, tenemos que

$$\int_{C_r} \nabla f \cdot N ds = \int\int_{D_r} \text{div}(\nabla f) dA = 0.$$

b) Parametrizando C_r como $\gamma(t) = (r\cos(t), r\,\text{sen}(t)),\ t \in [0, 2\pi]$, es fácil ver $\|\gamma'(t)\| = r$ y que el vector normal apuntando hacia afuera está dado por $N = (\cos(t), \text{sen}(t))$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \nabla f \cdot N ds &= \int_0^{2\pi} \nabla f(r\cos(t), r\,\text{sen}(t)) \cdot (\cos(t), \text{sen}(t)) r dt \\ &= r \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt. \end{aligned}$$

c) Usando lo anterior, tenemos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r} dt dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial r} dr dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(R\cos(t), R\,\text{sen}(t)) - f(0,0) dt \quad \text{(Teorema fundamental del cálculo)} \\ &= \int_0^{2\pi} f(R\cos(t), R\,\text{sen}(t)) dt - 2\pi f(0,0). \end{aligned}$$

P4.- Sea γ el cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$. Calcular $\int_\gamma y^2\, dx$, si γ se recorre en sentido positivo.

Solución:

Si R es la región encerrada por el cardioide, usando el Teorema de Green nos da

$$\int_\gamma y^2\, dx = \iint_R -2y\, dA\,.$$

Usando coordenadas polares para la región R y utilizando que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(k\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)d\theta = 0$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma y^2\,dx &= \iint_R -2y\,dA \\
&= -2\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\operatorname{sen}\theta} r\operatorname{sen}\theta\cdot r\,dr d\theta \\
&= -2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1+\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(1+\operatorname{sen}\theta)^3\operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}\theta+3\operatorname{sen}^2\theta+3\operatorname{sen}^3\theta+\operatorname{sen}^4\theta)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(3\frac{1-\cos(2\theta)}{2}+3\operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)+\operatorname{sen}^2\theta(1-\cos^2\theta)\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta+\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(2+3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta-\left(\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)^2\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(2+3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta-\left(\frac{1-\cos(4\theta)}{8}\right)\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{15}{8}+3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\right)\,d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\left[\frac{15}{8}\theta-\cos^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= -\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{8}\cdot 2\pi = -\frac{5\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

P5.- Sea α una curva arcoparametrizada en $\mathbb{R}^3$. Considere una curva β parametrizada por:

$$\beta(s) = \frac{1}{k_\alpha(s)}T_\alpha(s) - \int_0^s N_\alpha(u)du,$$

donde $k_\alpha(s)$, $T_\alpha(s)$, $N_\alpha(s)$ son la curvatura, vector tangente y vector normal en $\alpha(s)$, respectivamente.

Demuestre que la torsión de α y β satisfacen:

$$\frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta} = \left(\frac{1}{k_\alpha}\right)'.$$

Solución: Sabemos que la torsión de β está dada por:

$$\tau_\beta = \frac{(\beta'\times\beta'')\cdot\beta'''}{\|\beta'\times\beta''\|^2}.$$

Así, calculamos

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' T_\alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)} T'_\alpha(s) - N_\alpha(s) \\
&= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' T_\alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)} (k_\alpha(s) N_\alpha(s)) - N_\alpha(s) \\
&= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' T_\alpha(s). \\
\beta''(s) &= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'' T_\alpha(s) + \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' T'_\alpha(s) \\
&= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'' T_\alpha(s) + \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' k_\alpha(s) N_\alpha(s). \\
\beta'(s) \times \beta''(s) &= \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'^2 k_\alpha(s) B_\alpha(s).
\end{aligned}$$

Notemos que como queremos calcular $(\beta' \times \beta'') \cdot \beta'''$, sólo necesitamos ver el coeficiente de β''' que acompaña a B_α. Así,

$$\beta'''(s) = A(s) T_\alpha(s) + B(s) N_\alpha(s) + \left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)' k_\alpha \tau_\alpha B_\alpha(s).$$

Entonces,

$$\tau_\beta = \frac{(\beta' \times \beta'') \cdot \beta'''}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = \frac{\left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'^3 k_\alpha^2 \tau_\alpha}{\left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'^4 k_\alpha^2} = \frac{\tau_\alpha(s)}{\left(\frac{1}{k_\alpha(s)}\right)'}.$$

Entonces, $\frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta} = \left(\frac{1}{k_\alpha}\right)'$.

P6.- *a)* Considere la curva $C = \{(x, 1/x) : x \geq 1\}$. Sea V el sólido obtenido al rotar el área bajo la curva C en torno al eje x. ¿Es el volumen de este sólido finito o infinito?. Sea S la superficie de revolución obtenida al rotar la curva C en torno al eje x. ¿Es el área de esta superficie finita o infinita?. Justifique su respuesta.

b) Sea C la curva en polares parametrizada por $r = e^{-\theta/2\pi}, \theta \geq 0$. Bosqueje la curva. ¿Es el largo de esta curva finito o infinito? Si es infinito demuéstrelo, si es finito calcule el largo de la curva.

Solución:

a) Considerando la curva parametrica dada, con parámetro x, el volumen de el sólido V es:

$$\text{Vol}(V) = \int_C \pi y^2 \, dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{R\to\infty} \pi \int_1^R \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1.$$

Por otro lado, el elemento de arco de la curva C es

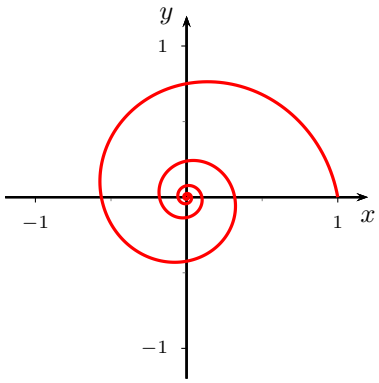
$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Y el area de la superficie de rotación S es:

$$\begin{aligned}
Area(S) &= \int_C 2\pi y \, ds = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx \\
&\geq 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi \int_1^R \frac{1}{x} \, dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi \ln(R) - 0 = \infty
\end{aligned}$$

Donde la desigualdad se cumple ya que $\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$, en particular en todo el intervalo de integración. Por lo tanto el area de S es infinita.

b) La curva C es un espiral que comienza en $(1,0)$ y al aumentar el ángulo θ el radio disminuye hacia 0.



Para calcular el largo calculamos el elemento de arco que en coordenadas polares es

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \sqrt{e^{-2\theta/2\pi} + \frac{e^{-2\theta/2\pi}}{4\pi^2}}\, d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\, e^{-\theta/2\pi}\, d\theta$$

Así el largo de curva es

$$L(C) = \int_C ds = \int_0^\infty \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\, e^{-\theta/2\pi}\, d\theta = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\, e^{-\theta/2\pi}\, d\theta$$

$$= \lim_{R\to\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\, 2\pi e^{-R/2\pi} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}\, 2\pi e^0 = 2\pi\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}.$$

MAT–1630 - CALCULO III
RESOLUCION INTERROGACIÓN 1
Primer Semestre 2018

1. Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.

   a) Encuentre una parametrización para la curva $\mathcal{C}$.

   b) Determine los puntos en la curva donde la curvatura es máxima y es mínima.

Solución: Parte(a)

Por la simetría del cilindro aplicamos coordenadas cilíndricas $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$ con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. **0.5 pts**

Las ecuaciones cartesianas se transforman en

$$x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow r^2 = 1\,, \quad x + y = 1 \Longrightarrow z = 1 - r\cos\theta$$ **1.0 pts**

Luego, $r = 1$, y entonces una parametrización de la curva es **0.5 pts**

$$r(\theta) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 1 - \cos\theta)\,, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\,.$$ **1.0 pts**

Solución: Parte (b)

La curvatura en $r(\theta)$ se calcula con la fórmula

$$\kappa(\theta) = \frac{|r'(\theta) \times r''(\theta)|}{|r'(\theta)|^3}$$ **0.5 pts**

Calculando se obtiene que $r'(\theta) \times r''(\theta) = (1, 0, 1)$. **0.5 pts**

Además $r'(\theta) = (-\mathrm{sen}\,\theta\,,\, \cos\theta\,,\, \mathrm{sen}\,\theta)$. **0.5 pts**

En resumen,

$$\kappa(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{(1 + \mathrm{sen}^2\,\theta)^{3/2}}$$ **0.5 pts**

Luego el máximo de la curvatura es $\sqrt{2}$ y se logra en $\theta = 0$ y en $\theta = \pi$, es decir, en los puntos $r(0) = (1, 0, 0)$ y $r(\pi) = (-1, 0, 2)$. **0.5 pts**

Luego el mínimo de la curvatura es $1/2$ y se logra en $\theta = \pi/2$ y en $\theta = 3\pi/2$, es decir, en los puntos $r(\pi/2) = (0, 1, 1)$ y $r(3\pi/2) = (0, -1, 1)$. **0.5 pts**

2. Considere la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$r(t) = (\sqrt{2t+1}\cos(\pi t)\,,\ \sqrt{2t+1}\,\mathrm{sen}(\pi t)\,,\ t\sqrt{2\pi}), \quad t \geq 0.$$

a) Calcule la ecuación cartesiana de la recta en $\mathbb{R}^3$ tangente a la curva en el punto $(-\sqrt{3}\,, 0,\ \sqrt{2\pi})$.

b) Calcule la función longitud de arco $s(t)$ de Γ.

Solución:

(a) El punto pedido se logra para $t = 1$, esto es , $r(1) = (-\sqrt{3}\,, 0,\ \sqrt{2\pi})$. **0.5 pts**

El vector tangente a la curva Γ en el punto $r(1)$ está dada por $r'(1)$,

$$r'(t) = \left[\tfrac{1}{\sqrt{2t+1}}\cos(\pi t) - \pi\sqrt{2t+1}\,\mathrm{sen}\,(\pi t),\quad \tfrac{1}{\sqrt{2t+1}}\,\mathrm{sen}\,(\pi t) + \sqrt{2t+1}\cos(\pi t),\quad \sqrt{2\pi}\right] \quad \textbf{0.5 pts}$$

De esta forma se obtiene que

$$r'(1) = \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad -\pi\sqrt{3}\,,\quad \sqrt{2\pi}\right] \qquad \textbf{0.5 pts}$$

La ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva es

$$(-\sqrt{3}\,, 0,\ \sqrt{2\pi}\,) + \tau r'(1) = \left[-\sqrt{3} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\tau\,,\quad -\pi\sqrt{3}\,\tau\,,\quad \sqrt{2\pi}(1+\tau)\right] \qquad \textbf{1.0 pts}$$

Ecuación cartesiana de la recta tangente : si llamamos $y = -\pi\sqrt{3}\,\tau$ lo cual resulta las igualdades siguientes:

$$3\pi(x+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{6\pi}}{2}\,(z - \sqrt{2\pi}) = y \qquad \textbf{0.5 pts}$$

(b) La longitud de arco es $s(t) = \int_0^t \|r'(u)\|\,du$. Calculemos la rapidez, $\|r'(u)\|$

$$\left.\begin{array}{rcl} \|r'(u)\|^2 & = & \left(\tfrac{1}{2u+1}\,(1 + \pi^2\,(2u+1)^2) + 2\pi\right) \\ & = & \tfrac{1}{2u+1}\,(\,\pi(2u+1)+1)^2 \end{array}\right] \quad \textbf{1.0 pts}$$

Por lo tanto,

$$s(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2u+1}}\,(\,\pi(2u+1)+1)\,du \qquad \textbf{0.5 pts}$$

Calculando las integrales se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{rcl} s(t) & = & \tfrac{1}{2}\,\left(-2 + 2\sqrt{1+2t}\right) + \tfrac{\pi}{2}\,\left(-\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}(1+2t)^{3/2}\right) \\ & = & \left(-1 + \sqrt{1+2t}\right) + \tfrac{\pi}{3}\,\left(-1 + (1+2t)^{3/2}\right) \end{array}\right] \quad \textbf{1.5 pts}$$

3. Considere la curva γ parametrizada por $r(t) = (t+2\,, 1-t\,, \frac{1}{2}\,t^2)$ con $-\infty < t < \infty$.

   a) Demuestre que el plano osculador en cualquier punto en la curva es el mismo.

   b) Calcule la torsión $\tau(s)$ de γ.

Solución: Parte (a)

El vector normal al plano osculador en $t = t_0$ tiene la dirección del vector

$$r'(t_0) \times r''(t_0) = (-1, -1, 0)\,. \qquad \boxed{\textbf{1.0 pts}}$$

Luego la normal es independiente de t_0. Por lo tanto la ecuación del plano osculador es:

$$[(x, y, z) - r(t_0)] \cdot (-1, -1, 0) = 0 \qquad \boxed{\textbf{1.0 pts}}$$

es decir,

$$\left[x - (t_0 + 2)\,, \quad y - (1 - t_0)\,, \quad z - \tfrac{1}{2}t_0^2\right] \cdot (-1, -1, 0) = 0 \Longrightarrow x + y = 3\,. \qquad \boxed{\textbf{1.0 pts}}$$

Luego, el plano osculador en cualquier punto de la curva es siempre el mismo y es $x + y = 3$.

Solución: Parte (b) **Asignación de puntaje: 0 - 1 - 2**

Puesto que el plano oscular es el mismo para todo punto de la curva se concluye que la curva es plana, es decir ella no sale del plano $x + y = 3$. Por lo tanto, su torsión $\tau(s) = 0$ para todo s.

Máximo 1 pto. si utilizan fórmula y se equivocan.

4. Sea γ la curva plana dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \theta$, y considere los puntos P_k en γ correspondientes a los valores $\theta_k = 2k\pi + \pi/2$, $k = 0, 1, 2, ...$ Pruebe que el trabajo del campo $\vec{F}(x, y) = (xy, y^2)$ a lo largo de γ entre puntos consecutivos P_k, P_{k+1} es una constante independiente de k.

Solución:

Por inspección se observa que los puntos tienen la representación

$$\left.\begin{array}{rcl}(x,y) & = & (0,(4k-3)\pi/2) \Longleftrightarrow \theta_1 = (4k-3)\pi/2 \\ (x,y) & = & (0,(4k+1)\pi/2) \Longleftrightarrow \theta_2 = (4k+1)\pi/2\end{array}\right] \qquad \boxed{\textbf{0.5 pts}}$$

En coordenadas polares, usando que la curva tiene por ecuación $\rho = \theta$, se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{rl} x = \rho\,\cos\theta = \theta\cos\theta & \Longrightarrow dx = (\cos\theta - \theta\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta = \theta\mathrm{sen}\,\theta & \Longrightarrow dy = (\mathrm{sen}\,\theta + \theta\,\cos\theta)\,d\theta\end{array}\right] \qquad \boxed{\textbf{1.0 pts}}$$

Por lo tanto el trabajo realizado por la fuerza F a lo largo de la curva γ es

$$\left.\begin{array}{rcl} T & = & \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\theta^2\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta\,(\cos\theta - \theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + \theta^2\mathrm{sen}^2\,\theta\,(\mathrm{sen}\,\theta + \theta\,\cos\theta)\,)\,d\theta \\ & = & \int_{\theta_1}^{\theta_2} \theta^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\end{array}\right] \qquad \boxed{\textbf{3.0 pts}}$$

La integral indefinida se calcula por integración por partes:

$$\int \theta^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = -\theta^2\cos\theta + 2\theta\mathrm{sen}\,\theta + 2\cos\theta \qquad \boxed{\textbf{1.0 pts}}$$

Evaluando se obtiene que

$$T = (\theta_2 - \theta_1) = 4\pi \qquad \boxed{\textbf{0.5 pts}}$$

Lo cual prueba que el trabajo realizado por la fuerza es una constante (4π) independiente de k.

MAT–1630 - CALCULO III
PAUTA INTERROGACIÓN 2
Primer Semestre 2018

1. Calcule la integral de línea en las siguientes curvas:

$$\int_\gamma (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy$$

a) γ es la poligonal que une los puntos $(0,1)$ y $(2,4)$ compuesta por el trazo rectilíneo que une $(0,1)$ con $(1,1)$ y el trazo rectilíneo que une $(1,1)$ con $(2,4)$.

b) γ es la curva que une los puntos (0,1) con (2,4) parametrizada por : $\phi(t) = (2t, 1 + 3\,\mathrm{sen}\,(\pi\, t/2))$ con $0 \le t \le 1$.

Solución: Parte (a)
Parametrización de $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ con $\gamma_1 : t \to (t,1)$ con $0 \le t \le 1$. Dar parametrización **0.5 ptos**

$$\int_{\gamma_1} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy = \int_0^1 (6t - 1)\,dt = 3 - 1 = 2\,.$$ Calcular integral **0.5 ptos**

Parametrización $\gamma_2 : t \to (t+1, 3t+1)$ con $0 \le t \le 1$. Dar parametrización **0.5 ptos**

$$\int_{\gamma_2} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy = \int_0^1 (6(t+1)(3t+1)^2 - (3t+1)^3)\,dt$$
$$+ 3\int_0^1 (6(t+1)^2(3t+1) - 3(t+1)(3t+1)^2)\,dt = \frac{197}{4} + \frac{51}{4} = 62\,.$$ Calcular integral **1.0 ptos**

Luego, la integral vale : $2 + 62 = 64$. Calcular integral **0.5 ptos**

Solución: Parte (b)
Llamemos $P(x,y) = 6xy^2 - y^3$ y $Q(x,y) = 6x^2y - 3xy^2$.

Entonces, $P_y = 12xy - 3y^2 = Q_x$. Verificar la condición conservativo **1.0 ptos**

Puesto que las derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ el campo $\vec{F} = (P,Q)$ es conservativo en todo $\mathbb{R}^2$. Verificar la condición conservativo **0.5 ptos**

Luego todas la integrales de línea a lo largo del campo $\vec{F}$ tienen el mismo valor para cualquier curva que une los puntos $(0,1), (2,4)$.
Concluir que la integral es independiente del camino **0.5 ptos**

Como la curva γ une los puntos en la mismo sentido, se tiene que

$$\int_{\gamma_2} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy = 64\,.$$ Calcular la integral **1.0 ptos**

Otra solución Problema 1

Encontrar una función potencial $f(x,y)$, que cumpla que su gradiente sea igual a las componentes del campo que nos dan. La función potencial adecuada es:

$$f(x,y) = 3x^2y^2 - xy^3\,. \qquad \boxed{\text{Determinar el potencial } \mathbf{1.5\ ptos}}$$

Puesto que de esta manera: (las derivadas parciales son)

$$\begin{aligned} f_x &= 6xy^2 - y^3 \\ f_y &= 6x^2y - 3xy^2 \end{aligned}$$

Son las componentes del campo vectorial dado: $F(x,y) = grad(f)$. $\boxed{\text{Comprobar gradiente } \mathbf{0.5\ ptos}}$

Luego, por el Teorema Fundamental de la Integral de línea, se cumple que el trabajo realizado es:

$$W_\gamma = \int_\gamma Pdx + Qdy = f(2,4) - f(0,1) = 64 \qquad \boxed{\text{Aplicar TF } \mathbf{1.0\ ptos}}$$

Parte b) Como el campo es un campo gradiente y es C^1 en cualquier región que contenga a los puntos $(0,1),(2,4)$ se sabe que la integral de línea sólo depende de los valores del potencial f en los puntos $(0,1)$ y $(2,1)$.

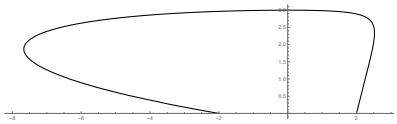
Para ello además la curva debe satisfacer las condiciones: ser suave, es decir, $\phi'(t)$ continua y $\phi'(t) \neq 0$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Ambas condiciones se cumplen puesto que $\phi'(t) = (2, \pi/2\ \cos(\,(\pi\, t/2))$ $\boxed{\text{Verificar hipótesis del TF } \mathbf{1.0\ ptos}}$

Además la curva $\gamma_3 : \phi(t) = (2t, 1 + 3\,\text{sen}\,(\pi\, t/2))$ con $0 \leq t \leq 1$ está orientada : comienza en $(0,1)$ y termina en $(2,4)$ se obtiene: $\phi(0) = (0,1)$ y $\phi(1) = (2,4)$.

$\boxed{\text{Verificar la orientación de la curva } \mathbf{1.0\ ptos}}$

$$\int_{\gamma_3} Pdx + Qdy = 64\,. \qquad \boxed{\text{Calcular la integral de línea } \mathbf{1.0\ ptos}}$$

2. Considere $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la curva parametrizada como
$r(t) = (\cos(t)\big(2 + \operatorname{sen}(t)e^t\big)\,,\, \operatorname{sen}(t)\big(3 + \cos^2(t)\big)), t \in [0, \pi]$, graficada abajo.

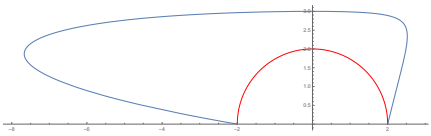


Calcule la integral de trabajo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F}$ es el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = (3 - \frac{y}{x^2 + y^2}\,,\, 2 + \frac{x}{x^2 + y^2}).$$

Ayuda. Observar que el campo tiene una singularidad en $(0, 0)$**.**

Solución: Queremos aplicar teorema de Green, pero el campo $\vec{F}$ tiene problemas en $(0, 0)$, que esta en la línea recta que une $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, así que ocupamos la semicircunsferencia superior C mostrada en la siguiente figura



Completar camino adecuado con parametrización **1.0 ptos**

parametrizada por $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t)), \quad t \in [0, \pi]$.

Si D es el dominio entre Γ y C entonces ahí si tenemos las condiciones para ocupar el teorema de Green y denotando $\vec{F} = (P, Q)$, concluimos que (ocupando las orientaciones de las parametrizaciones arriba)

$$\int_\Gamma F \cdot dr - \int_C F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA\,.$$

Aplicar Green **1.0 ptos**

Como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0.$

Verificar condición en el interior **1.0 ptos**

Por lo tanto

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

Concluir igualdad de integrales de línea **1.0 ptos**

Calculamos la integral de trabajo sobre $C : \gamma(t) = (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t)), t \in [0, \pi]$ directamente

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_0^\pi (3 - \frac{2\operatorname{sen}(t)}{4}, 2 + \frac{2\cos(t)}{4}) \cdot (-2\operatorname{sen}(t), 2\cos(t))dt \\ &= \int_0^\pi -6\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^2(t) + 4\cos(t) + \cos^2(t)dt \\ &= -12 + \pi\end{aligned}$$

Calcular la integral de línea **2.0 ptos**

y concluimos que $\int_\Gamma F \cdot dr = -12 + \pi$.

3. Llamemos S_1 a la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ que queda dentro del cono $z=\alpha\sqrt{x^2+y^2}$, $\alpha>0$, y S_2 la porción del mismo cono que queda dentro de la esfera dada. Determinar el valor de α de modo que el área de la superficies sean iguales.

Solución:

Debemos determinar la intersección de la esfera y el cono: esto sucede cuando $x^2+y^2+\alpha^2(x^2+y^2)=1$, es decir, si

$$x^2+y^2=\frac{1}{1+\alpha^2}=a^2\ ,\ z=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,.$$ Descripción de la entersección **1.0 ptos**

Así, S_1 corresponde a la porción de la esfera con $z\geq 0$ y $x^2+y^2\leq a^2$, mientras que S_2 corresponde a la porción del cono también con $x^2+y^2\leq a^2$.

En ambos casos calculamos áreas con parametrización con $z=f(x,y)$ un gráfico y elemento de área $d\sigma=\sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy$.

Para S_1 tenemos

$$1+|\nabla f|^2=1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}=\frac{1}{1-x^2-y^2}\,,$$ Determinar elemento de área para S_1 **1.0 ptos**

así que

$$A_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=2\pi\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=2\pi\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\,.$$ Cálculo de área de S_1 **1.0 ptos**

Para S_2 tenemos

$$1+|\nabla f|^2=1+\frac{\alpha^2x^2}{x^2+y^2}+\frac{\alpha^2y^2}{x^2+y^2}=1+\alpha^2\,,$$ Determinar elemento de área para S_2 **1.0 ptos**

de modo que

$$A_2=\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\sqrt{1+\alpha^2}\,dxdy=\pi a^2\sqrt{1+\alpha^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,.$$ Cálculo de área para S_2 **1.0 ptos**

La condición de que $A_1=A_2$ da que $\alpha=3/4$. Cálculo de α **1.0 ptos**

4. Considere la superficie Σ parametrizada por $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ según la ecuación

$$r(u, v) = (u\,,\, 1 + u^2 + v^2\,,\, v).$$

a) Encuentre la ecuación del plano tangente a Σ en el punto $r(u, v)$.

b) Sea $\Gamma \subset \Sigma$ los puntos de la superficie Σ cuyos planos tangentes pasan por el origen. Encuentre una parametrización de la curva Γ.

Solución:

a) Primero calculemos un vector normal al plano tangente a Σ en el punto $r(u, v)$. Calculamos

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = (1, 2u, 0)$$
$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = (0, 2v, 1)$$

Calcular derivadas parciales **1.0 ptos**

$$\Rightarrow r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2u & 0 \\ 0 & 2v & 1 \end{vmatrix} = (2u, -1, 2v)$$

Calcular vector normal del plano **1.0 ptos**

El vector $r_u \times r_v$ es un vector normal al plano tangente y el plano tangente a Σ en $r(u, v)$ corresponde a los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(x, y, z) - r(u, v)) \cdot ((2u, -1, 2v) = 0$ En resumen, todos los planos tangentes a la superficie son

$$2ux - y + 2vz = u^2 + v^2 - 1\,.$$

Determinar la ecuación del plano tangente **1.0 ptos**

Observación: Un vector normal también se puede encontrar observando que Σ corresponde al gráfico de una función (es de la forma $(u, h(u, v), v)$), y por lo tanto $(-\partial h/\partial u, 1, -\partial h/\partial v)$ es un vector normal a la superficie en el punto $r(u, v)$, y basta con calcular las derivadas parciales de h y reemplazar.

b) Un plano tangente pasa por el origen ssi $(0, 0, 0)$ satisface la ecuación del plano.
Luego, los planos tangentes a Σ en el punto $r(u, v)$ pasan por el origen deben satisfacer que

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Expresar condición **1.0 ptos**

Todos los posibles valores de u, v que satisfacen esta ecuación forman un círculo en $\mathbb{R}^3$

Identificar la curva **0.5 ptos**

Debe estar en la superfice, luego su parametrización es :

$$(\cos t\,,\, 2\,,\, \sin t\,)\,, t \in [0, 2\pi]\,.$$

Parametrización de la curva **1.5 ptos**

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
11 Junio 2018

MAT–1630 - CALCULO III
INTERROGACIÓN 3
Primer Semestre 2018

1. Considere el campo $\vec{F}(x,y,z) = (z\arctan(y^2),\, z^3\ln(x^2+1),\, z)$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que se sitúa encima del plano $z=1$ y está orientado hacia arriba.

Solución. Cálculo la divergencia del campo,

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial(z\arctan(y^2))}{\partial x} + \frac{\partial(z^3\ln(x^2+1))}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1\,.$$ Cálculo de divergencia **0.5 ptos**

Llamemos M^* el paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que se sitúa encima del plano $z=1$ y $M=\{(x,y,z) : x^2+y^2\le 1, z=1\}$.

Usando el Teorema de la Divergencia se concluye que

$$\int\int_{M^*}(F\cdot\vec{n})\,dS = \int\int\int_D(\mathrm{div}\vec{F})\,dV - \int\int_M(F\cdot\vec{n})\,dS\,.$$ Aplicación del T.D **1.0 ptos**

Calculando se tiene que

$$\int\int\int_D(\mathrm{div}\vec{F})\,dV = \int\int_{disco}\int_1^{2-x^2-y^2} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\,.$$ Cálculo Integral **2.0 ptos**

Puesto que $\vec{F}\cdot\vec{n} = (\arctan(r^2\sin\theta), \ln(r^2\cos^2+1), 1)\cdot(0,0,-1) = -1$ se obtiene que

Cálculo $\vec{F}\cdot\vec{n}$ **1.0 ptos**

$$\int\int_M(\vec{F}\cdot\vec{n})dS = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dA = -\pi\,.$$ Cálculo Integral **1.0 ptos**

Por lo tanto

$$\int\int_{M^*}(\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \frac{\pi}{2}+\pi = \frac{3\pi}{2}$$ Explicitar resultado **0.5 ptos**

2. a) Calcule el área de la superficie K que se genera al rotar la gráfica de $f(x) = 1 - x^2$ entre $0 \leq x \leq 1$ en torno al eje OY.

b) Calcule la integral de superficie $\int\int_S (x + z)\, dS$ donde S es la porción del primer octante del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

Solución. Parte a)
Parametrizamos la superficie K que se genera al rotar la gráfica de f con respecto al eje OY por $\phi(u, v) = (x(u, v), t(u, v), z(u, v))$ con

$$x(u, v) = u \cos v\,, \quad y(u, v) = f(u)\,, \quad z(u, v) = u \operatorname{sen} v\,.$$ Parametriza superficie **1.0 ptos**

Por lo tanto, el elemento de área dS se calcula por

$$\begin{aligned} dS &= \|\phi_u \times \phi_v\|\, dA \\ &= |u|\|(f'(u)u\, \cos v\,, -u\,, f'(u)u \operatorname{sen} v)\|\, du\, dv \\ &= |u|\sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du\, dv \end{aligned}$$ Calcula dS **0.5 ptos**

El área de la superficie K es

$$\begin{aligned} A(K) &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} |u|\sqrt{1 + (f'(u))^2} dv \\ &= 2\pi \int_0^1 u\sqrt{1 + 4u^2}\, du = \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{p}\, dp \end{aligned}$$ Expresa el área como una integral **1.0 ptos**

De esta manera el área es : $A(K) = \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)$. Explicita el valor del área **0.5 ptos**

Solución. Parte b)
Proyectando la superficie S en el plano XY se observa que la superficie es la gráfica de una función.

Luego, una parametrización de S es

$$x(u,v) = u\,, \quad y(u,v) = v\,, \quad z(u,v) = g(u,v) = \sqrt{9-v^2}\,,$$ Parametriza superficie **0.5 ptos**

donde el elemento de área dS es

$$dS = \sqrt{1+(g_u)^2+(g_v)^2}dA = \frac{3}{\sqrt{9-v^2}}\,du\,dv$$ Cálcula dS **0.5 ptos**

Notamos que en $y = 3$ la derivada parcial $g_y = \frac{-v}{\sqrt{9-v^2}}$ no es continua en $y = 3$. Para logra calcularla debemos acercarnos a $y = 3$ Observa la singularidad dS **0.5 ptos**

$$\lim_{a\to 3}\int_0^a \int_0^4 \left(u+\sqrt{9-v^2}\right)\frac{3}{\sqrt{9-v^2}}\,du\,dv$$ Representa integral de superficie como integral impropia **0.5 ptos**

De esta manera se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int\int_S (x+z)\,d\sigma &= 3\lim_{a\to 3}\int_0^a \left(4+\frac{8}{\sqrt{9-v^2}}\right)dv \\
&= 3\lim_{a\to 3}(4a+8\arcsin\left(\frac{a}{3}\right)) \text{ Calcula integral impropia } \textbf{0.5 ptos} \\
&= 36+24\,\frac{\pi}{2} \\
&= 36+12\,\pi \quad \text{Explicita el resultado de la integral } \textbf{0.5 ptos}
\end{aligned}$$

Solución. Parte b) Solución alternativa

Otra parametrización de la superficie es

$$x = x\,, \quad y = 3\cos t\,, \quad z = 3\,\mathrm{sen}\,t\,, \quad x\in[0,4]\,, \quad t\in[0,\pi/2]$$ Parametriza superficie **0.5 ptos**

Se calcula el elemento de área dS con ésta parametrización

$$dS = \|(0,-3\cos t,-3\mathrm{sen}\,t)\|\,dA = 3\,dtdx$$ Calcula dS **0.5 ptos**

Luego la integral de superficie se transforma en

$$\int\int_S (x+z)dS = 3\int_0^{\pi/2} dt\int_0^4 (x+3\,\mathrm{sen}\,t)dt$$ Reoresenta $\int\int_S (x+z)dS$ como integral doble **1.0 ptos**

Calculando se obtiene que

$$\int\int_S (x+z)dS = 3\int_0^{\pi/2}(8+12\,\mathrm{sen}\,t)\,dt$$ Calcula integral doble **0.5 ptos**

Finalmente

$$\int\int_S (x+z)dS = 36+12\,\pi$$ Explicita el resultado de la integral **0.5 ptos**

3. Sea S la porción de $x^2+y^2+z^2=4$ comprendida entre $z=-1$ y $z=1$. Calcule el valor de

$$\int\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

siendo $\vec{n}$ el vector normal unitario apuntando hacia afuera y $\vec{F}=(P,Q,R)$ es un campo de clase C^1 con $P(x,y,z)=yz$, $Q(x,y,z)=xz$, $R(x,y,z)=h(z)$.

Solución.
Observemos que la la superficie S tiene dos curvas C_1, C_2 que constituyen su frontera:

$C_1 : x^2+y^2=3,\ z=-1\,, \quad C_2 : x^2+y^2=3,\ z=1$ Describe la frontera **0.5 ptos**

Orientaciones adecuadas de las curvas son respectivamente:

$$\begin{array}{rcl} C_1 & : & (\sqrt{3}\,\cos t, \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, -1) \\ C_2 & : & (\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{3}\,\cos t,\ 1) \end{array}$$ Parametriza la frontera **1.0 ptos**

con $0 \le t \le 2\pi$.

Aplicando el Teorema de Stokes, que relaciona la integral de superficie con la integral de línea, rot $\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$,

$$\int\int_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\; dS = \int_{C_1\cup C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ Aplica Teorema de Stokes **1.0 ptos**

Calculamos las integrales de líneas

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \vec{F}\cdot \vec{t}\, ds \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, -\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, h(1)) \cdot (-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{3}\cos t, 0)\, dt \\ &= 3\int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}^2 t - \cos^2 t)\, dt = 0 \end{aligned}$$ Calcula la integral de línea **1.5 ptos**

Ahora para C_2

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} \vec{F}\cdot \vec{t}\, ds \\ &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}\,\cos t, \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t,\ h(1)) \cdot (\sqrt{3}\,\cos t\,, -\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t,\ 0)\, dt \\ &= 3\int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t)\, dt = 0 \end{aligned}$$ Calcula la integral de línea **1.5 ptos**

Se concluye que

$$\int\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0\,.$$ Explicita la respuesta **0.5 ptos**

4. Calcule $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde el campo vectorial $\vec{F}$ está definido por

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},e^{\operatorname{sen}^2(z)}\right),$$

y Γ es la curva parametrizada por $r(t)=(2\cos t,2\operatorname{sen} t,\cos^3 t-\operatorname{sen}^5 t), t\in[0,2\pi]$.

Solución.

Observamos que cuando $x^2+y^2\neq 0$ el campo $\vec{F}$ tiene derivadas parciales continuas y

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & e^{\operatorname{sen}^2(z)} \end{vmatrix} \\ &= \left(0,\,0,\,\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &= (0,0,0). \qquad \boxed{\text{Calcula el rotor } \mathbf{0.5\ ptos}}\end{aligned}$$

Obsevemos que cualquier superficie (acotada) cuya curva frontera es sólo Γ necesariamente intersecta al eje z, donde $x^2+y^2=0$, es decir donde el campo $\vec{F}$ no es continuo, por lo que no se puede aplicar el Teorema de Stokes directamente.
$\boxed{\text{Explica porqué que no se puede aplicar Teorema de Stokes } \mathbf{0.5\ ptos}}$

Por otro lado, no es difícil encontrar una superficie S que no intersecta al eje z y cuya frontera consiste de: la curva Γ y la circunferencia unitaria C parametrizada por $\gamma(t)=(\cos(t),-\operatorname{sen}(t),0), t\in[0,2\pi]$ con parametrizaciones orientadas adecuadamente.
$\boxed{\text{Descripción de la nueva superficie } S \text{ donde } \mathbf{0.5\ ptos}}$

Tal superficie es por ejemplo la superficie S parametrizada por

$$\sigma(t,\rho)=((\rho+1)\cos(t),(\rho+1)\operatorname{sen}(t),\rho(\cos^3 t-\operatorname{sen}^5 t)), t\in[0,2\pi],\rho\in[0,1].$$

Basta con mencionar que existe tal superficie, no es necesario construir un ejemplo como el de arriba, ejemplo que se presenta solo por completitud.
$\boxed{\text{Descripción de la nueva superficie } S \quad \mathbf{2.0\ ptos}}$

Sobre la superficie S el campo $\vec{F}$ si cumple las condiciones para aplicar el Teorema de Stokes y se obtiene que

$$\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}, \qquad \boxed{\text{Aplica Teorema de Stokes } \mathbf{0.5\ ptos}} \qquad (1)$$

pero $\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}=0$, pues $\nabla\times\vec{F}=(0,0,0)$. $\boxed{\text{Calcula } \iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} \quad \mathbf{0.5\ ptos}}$

Luego,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}=\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen} t,\cos t,1)\cdot(-\operatorname{sen} t,-\cos t,0)\,dt=-2\pi. \qquad \boxed{\text{Calcula correctamente la integral } \mathbf{1.0\ ptos}}$$

Reemplazando en (1) concluimos que $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=2\pi$. $\boxed{\text{Explicita la respuesta } \mathbf{0.5\ ptos}}$

MAT–1630 - CALCULO III
EXAMEN
Primer Semestre 2018

1. *a*) Calcule el valor de la integral de línea siguiente:

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

con C es la parte del arco $y = 2x^2 - 1$ que parte de $(1, 1)$ y termina en $(0, -1)$.

b) Calcule el valor de la integral de línea $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + y}{x^2 + y^2} \right)$$

y γ es una curva suave cerrada simple que encierra $(0, 0)$ recorrida en sentido antihorario.

Solución. Parte a)

Llamemos $F = (P, Q)$ con $P(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

El campo es conservativo puesto que

$$\begin{aligned} P_y - Q_x &= \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2}{x^2 + y^2} = 0. \end{aligned}$$

Verifica condición **1.0 ptos**

La integral de línea no depende de la curva siempre que se evite el origen.

Concluye independencia **0.5 ptos**

Elijamos el camino poligonal: trozo recto L_1 $(0, -1)$ a (1,-1) y trozo recto L_2 (1,-1) a (1,1). Como está orientado al revés se obtiene que

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = -\int_{L_1 \cup L_2} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = -\int_{L_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \int_{L_2} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Calculando, $L_1 : (t, -1) \quad , 0 \leq t \leq 1$

$$\int_{L_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{4}\,.$$

Calculando, $L_2 : (1, t) \quad , -1 \leq t \leq 1$

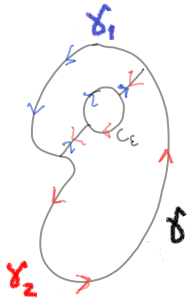
$$\int_{L_2} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Luego el valor de la integral de línea es : $-\frac{3\pi}{4}$. Calcula la integral **1.5 ptos**

Error de signo se resta **0.5 ptos**

Solución. Parte b)

Se construye un círculo C_ϵ de centro en $(0,0)$ y radio ϵ como muestra la figura orientado contrario al horario,



Llamemos $F = (P, Q)$ con $P(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ y $Q(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

El campo es conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ puesto que

$$P_y - Q_x = \frac{-1}{x^2+y^2} - \frac{(x-y)2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)2x}{(x^2+y^2)^2} = 0\,.$$

Verifica condicion **0.5 ptos**

Como la curva cerrada γ rodea al origen, que es una singularidad del campo $\vec{F}$, no podemos aplicar que la integral a lo largo de γ es cero. Sin embargo, como muestra la figura podemos descomponer el camino,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_\epsilon} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ Descomposición integral **0.5 ptos**

Los pedazos que unen el cículo con γ se simplifican entre si pues es el mismo camino recorrido en direcciones opuestas. Argumenta igualdad anterior **0.5 ptos**

Las curvas cerradas γ_1 y γ_2 no rodean al origen. Luego, como el campo $\vec{F}$ es conservativo sus integrales son cero.

Resumiendo,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_\epsilon} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,.$$ Argumenta igualdad **0.5 ptos**

Se parametriza el camino circular : $\beta(t) = (\epsilon\cos t, \epsilon\,\mathrm{sen}\, t)\,:\, 0 \le t \le 2\pi$ obteniéndose que:

$$\begin{aligned}\int_{C_\epsilon} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon^2}(\epsilon\cos t - \epsilon\,\mathrm{sen}\, t)(-\epsilon\,\mathrm{sen}\, t)dt + \frac{1}{\epsilon^2}(\epsilon\cos t + \epsilon\,\mathrm{sen}\, t)(\epsilon\,\cos\, t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt \\ &= 2\pi\,.\end{aligned}$$ Calcula integral en C_ϵ **1.0 ptos**

2. Considere S la porción del plano $x+y+z=1$ que está dentro del cilindro $x^2+y^2=1$ y llamemos C a la curva frontera de S. Calcule el área de S utilizando el Teorema de Stokes.

Solución.

El Teorema de Stokes asegura que para una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con frontera una curva C^1,

$$\int_{\delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S F \times \nabla \cdot \vec{n}\, dS$$

con $\vec{n}$ normal exterior unitario exterior a S. Explicita Teorema de Stokes **0.5 ptos**

Un vector normal a la superficie S es cualquier múltiplo de $N = (1,1,1)$ pues este vector es el vector normal al plano $x+y+z=1$ y la superficie está contenida en ese plano. Luego, la normal unitaria a S en la dirección correcta es $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Calcula o deduce $\vec{n}$ **1.5 ptos**

La igualdad del Teorema de Stokes se escribe como:

$$\int_{\delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S (F \times \nabla) \cdot (1,1,1)\, dS\,.$$

Elegimos un campo adecuado de tal manera que $(F\times\nabla)\cdot(1,1,1)$ sea constante no nula, por ejemplo si $\vec{F}(x,y,z) = (-y,0,0)$. Construir campo adecuado **1.0 ptos**

Entonces

$$(F \times \nabla) = (0,0,1) \Longrightarrow (F \times \nabla) \cdot (1,1,1) = 1\,. \qquad \text{Calcula Rotor } \textbf{1.0 ptos}$$

De esta manera se obtiene que

$$\sqrt{3} \int_{\delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S dS \Longrightarrow A(S) = \sqrt{3} \int_{\delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad \text{Calcula } \textbf{1.0 ptos}$$

Una parametrización de δS es

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - \cos t - u\operatorname{sen} t)\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Calculamos la integral de línea, Calcula la integral de línea **1.0 ptos**

$$\int_{\delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)\, dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = \pi$$

El área de S es $A(S) = \pi\sqrt{3}$.

3. Se define el campo $\vec{F}(x,y,z) = (x+yz, Q(x,y,z), x^2+y^2+2z)$ con Q una función C^1 en $\mathbb{R}^3$ y $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = -1$. Evalue el flujo

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

donde S es la porción del paraboloide $z = 1-x^2-y^2$ con $z \geq 0$ y $\vec{n}$ es la normal unitaria apuntando hacia afuera.

Solución.

Cerramos la superficie S con la tapa plana $T : x^2+y^2 \leq 1, z = 0$, y aplicamos el Teorema de la Divergencia. Cerrar la superficie (agregar tapa) **0.5 ptos**

Así la integral pedida, $J = \int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ es igual a

$$J = \iiint_{0\leq z\leq 1-x^2-y^2} \nabla\cdot\vec{F}\,dxdydz - \iint_T \vec{F}\cdot(0,0,-1)\,dxdy\,.$$ Aplica el TD **1.5 ptos**

Además la divergencia es : $\nabla\cdot\vec{F} = 2$. Calcula la divergencia del campo **1.5 ptos**

La integral triple es

$$2\iint_{x^2+y^2\leq 1}(1-x^2-y^2)dxdy = \pi\,,$$ Calcula la integral **1.0 ptos**

cambiando a polares por ejemplo. Considerando los dos signos menos, el segundo término queda igual a

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)dxdy = \pi/2\,,$$ Calcula la integral triple **1.0 ptos**

de modo que el flujo original es igual a $3\pi/2$. Calcula el flujo **0.5 ptos**

4. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\phi(u,v), (u,v) \in D \subset (0,\infty) \times \mathbb{R}$. Suponga que $\phi(u,v)$ tiene segundas derivadas continuas en D que satisfacen:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}(u,v) = 0, \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}(u,v) = \frac{1}{u}\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v), \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}(u,v) = -\frac{1}{u}\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v),$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v) \perp \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v), \qquad ||\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)|| = 1, \qquad ||\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)|| = u.$$

Sea C la curva parametrizada por $r(t) = \phi(t^2,t), t > 0$. Calcule la curvatura de C en el punto $r(1)$.

Solución.

Calculamos $r'(t)$ derivando:

$$r'(t) = 2t\frac{\partial\phi}{\partial u}(t^2,t) + \frac{\partial\phi}{\partial v}(t^2,t). \qquad \boxed{\text{Calcula } r'(t) \quad \textbf{1.0 ptos}}$$

Derivando nuevamente y reemplazando según las propiedades del enunciado obtenemos $r''(t)$,

$$\begin{aligned} r''(t) =& 2\frac{\partial\phi}{\partial u}(t^2,t) + 4t^2\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}(t^2,t) + 2t\frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial u}(t^2,t) + 2t\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}(t^2,t) + \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}(t^2,t), \\ =& 2\frac{\partial\phi}{\partial u}(t^2,t) + 0 + 4t\left[\frac{1}{t^2}\frac{\partial\phi}{\partial v}(t^2,t)\right] + \left[-\frac{1}{t^2}\frac{\partial\phi}{\partial u}(t^2,t)\right], \\ =& \left(2 - \frac{1}{t^2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial u}(t^2,t) + \frac{4}{t}\frac{\partial\phi}{\partial v}(t^2,t). \qquad \boxed{\text{Calcula } r''(t) \quad \textbf{2.0 ptos}} \end{aligned}$$

Luego, en $t = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} r'(1) =& 2\frac{\partial\phi}{\partial u}(1,1) + \frac{\partial\phi}{\partial v}(1,1), \qquad \boxed{\text{Evalua } r'(1) \quad \textbf{0.5 ptos}} \\ r''(1) =& \frac{\partial\phi}{\partial u}(1,1) + 4\frac{\partial\phi}{\partial v}(1,1). \qquad \boxed{\text{Evalua } r''(1) \quad \textbf{0.5 ptos}} \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial\phi}{\partial u} \perp \frac{\partial\phi}{\partial v}$ se tiene que

$$r'(1) \times r''(1) = (8-1)\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}. \qquad \boxed{\text{Calcula producto cruz} \quad \textbf{1.0 ptos}}$$

Como además de ser perpendiculares, $||\frac{\partial\phi}{\partial u}(1,1)|| = 1$ y $||\frac{\partial\phi}{\partial v}(1,1)|| = 1$, concluimos

$$\begin{aligned} ||r'(1)|| &= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \\ ||r'(1) \times r''(1)|| &= 7, \end{aligned}$$

y por lo tanto, la curvatura de C en $r(1)$ es $\qquad \boxed{\text{Calcula curvatura} \quad \textbf{1.0 ptos}}$

$$\kappa = \frac{||r'(1) \times r''(1)||}{||r'(1)||^3} = \frac{7}{5\sqrt{5}}.$$

MAT–1630 - CALCULO III
INTERROGACIÓN 1
Desarrollo

1. Resuelva los siguientes problemas.

   a) Determine la ecuación del plano normal a la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

   $$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3,$$

   en el punto $P = (1, 1, 1)$.

   b) Determine la ecuación del plano osculador a la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

   $$\mathbf{r}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t, -2t)$$

   en el punto $Q = (-1, 0, 0)$.

Solución: a) Notemos que la curva está definida por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$. Por lo tanto, para $t = 1$, se obtiene que $\mathbf{r}(1) = (1, 1, 1) = P$. Calcula t **0.5 ptos**

Así

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(1) = (1, 2, 3).$$ Calcula $r'(1)$ **1.0 ptos**

Luego la ecuación del plano normal a la curva en el punto $P(1, 1, 1)$ es

$$(x-1), y-1, z-1) \cdot r'(1) = 0 \Rightarrow (x-1)+2(y-1)+3(z-1) = 0,$$ Ecuación del plano **1.0 ptos**

o equivalentemente

$$x + 2y + 3z = 6.$$ Ecuación simplificada del plano **0.5 ptos**

b) Notemos que

$$\mathbf{r}'(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, -2) \quad \text{y} \quad r''(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0).$$ Calcula r' y r'' **1.0 ptos**

Luego

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (-2\operatorname{sen} t, -2, \cos t, -1).$$ Calcula producto cruz **0.5 ptos**

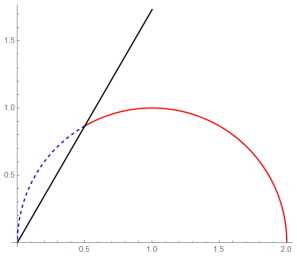
Así $\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = (0, -2, -1)$. Explicita vector normal en $t = 0$ **0.5 ptos**

Como $\mathbf{r}(0) = Q = (-1, 0, 0)$ tenemos que la ecuación del plano osculador es

$$(0, -2, -1) \cdot (x + 1, y, z) = 0,$$ Escribe ecuación plano **0.5 ptos**

o equivalentemente

$$2y + z = 0.$$ Simplifica ecuación plano **0.5 ptos**



2. Considere la curva cuya ecuación en coordenadas polares es:

$$r = 2\cos\theta \qquad -\pi/2 < \theta < \pi/2\,.$$

Calcule la longitud del arco comprendido entre el eje horizontal y la recta de ecuación $y = \sqrt{3}\,x$ (en coordenadas Cartesianas).

Solución: El punto P sobre la curva con coordenadas polares (r, θ) tiene coordenadas Cartesianas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$ Escribe coordenada cartesiana de P **0.5 ptos**

La curva intersecta el eje horizontal cuando $\theta = 0$. Explicita corte con OX **0.5 ptos**

En el punto de intersección con la recta $y = \sqrt{3}\,x$ se tiene que

$$r\,\mathrm{sen}\,\theta = y = \sqrt{3}\,x = \sqrt{3}\,r\cos\theta,$$

de modo que $\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{3}\cos\theta$. Plantea ecuación **0.5 ptos**

Como solo se están considerando valores del parámetro θ entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, en el punto de intersección se tiene que $\theta = \pi/3$. Encuentra θ **1.0 ptos**

Se concluye que la longitud pedida es

$$L(\text{arco}) = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2}\,\mathrm{d}\,\theta$$ Plantea la integral θ **1.5 ptos**

Calculando,

$$\int_0^{\pi/3} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2}\,\mathrm{d}\,\theta = \int_0^{\pi/3} 2\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}.$$ Calcula la integral θ **2.0 ptos**

Si se calcula la longitud del arco punteado, $\pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ también esta respuesta se considera correcta.

3. Considere $\mathbf{r}(t) = (1+t, 1-t, t^n)$ una parametrización de una curva $\mathcal{C}$.

   (a) Para $n = 1$ parametrice la curva $\mathcal{C}$ por longitud de arco $\mathbf{r}(s)$ con $s = 0$ para $t = 0$.

   (b) Si $n = 2$ demuestre que la curva es plana y calcule la ecuación cartesiana del plano que la contiene.

   (c) Si $n = 3$ calcule la curvatura en t y calcule la binormal $\mathbf{B}(t)$ para $t \neq 0$.

Solución (a) Para $n = 1$, $\mathbf{r}'(t) = (1, -1, 1)$. Luego, $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{3}$. Calcula $|\mathbf{r}'(t)|$ **0.5 ptos**

Entonces

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{3}\, d\tau = \sqrt{3}\, t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{3}}\,.$$ Calcula s **0.5 ptos**

Por lo tanto, la parametrización por longitud de arco pedida es

$$\vec{r}(s) = \left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\,.$$ Explicita $r(s)$ **1.0 ptos**

Solución (b) Para $n = 2$,

$$\mathbf{r}(t) = (1+t, 1-t, t^2) \quad , \quad \mathbf{r}'(t) = (1, -1, 2t)\,,$$
$$\mathbf{r}''(t) = (0, 0, 2) \quad , \quad \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|^3 = (2 + 4t^2)^{3/2}\,.$$

Además $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = -2\hat{i} - 2\hat{j}$. Luego,

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}\, \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \frac{-i}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}$$

Como $\mathbf{B}$ es constante, la curva se encuentra en un plano cuya normal es $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

Mostrar que B es constante **1.0 ptos**

Además el plano contiene a $\mathbf{r}(0) = (1, 1, 0)$. Luego la ecuación cartesiana del plano que contiene a la curva es

$-(x-1)-(y-1) = 0$ equivalentemente $x+y-2 = 0$. Determina ecuación plano **1.0 ptos**

Solución (c) Para $n = 3$

$$\mathbf{r}(t) = (1+t, 1-t, t^3) \quad , \quad \mathbf{r}'(t) = (1, -1, 3t^2)\,,$$
$$\mathbf{r}''(t) = (0, 0, 6t) \quad , \quad |\mathbf{r}'(t)|^3 = (2 + 9t^4)^{1/2}\,.$$

Luego, la curvatura κ es

$$\kappa(t) = \frac{6|t|\sqrt{2}}{(\sqrt{2 + 9t^4})^3}$$ Calcula κ **1.0 ptos**

Para $t \neq 0$ se tiene que

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) & \text{si } t > 0 \quad \textbf{0.5 ptos} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) & \text{si } t < 0 \quad \textbf{0.5 ptos} \end{cases}$$

4. Sean $\mathbf{r}(t)$ la parametrización de una curva Γ en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{r}(s)$ una parametrización por longitud de arco de Γ.

   a) Demuestre que $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2} = \kappa\mathbf{N}$, donde κ es la curvatura y $\mathbf{N}$ la normal unitaria.

   b) $\mathbf{B}$ binormal. Usando la fórmula de la parte a), aunque no haya podido demostrarla, pruebe que

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^3}\cdot\mathbf{B} = \kappa\,\tau\,, \quad \text{donde } \tau \text{ es la torsión y } \cdot \text{ representa el producto punto.}$$

Solución (a)

Por definición de parámetro s de longitud de arco:

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}(\tau)\|\,d\tau \Longrightarrow \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|\,. \qquad \boxed{\textbf{0.5 ptos}}$$

Usando la regla de la cadena vemos que

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \qquad \boxed{\textbf{1.0 ptos}}$$

En consecuencia,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \mathbf{T}. \qquad \boxed{\textbf{1.0 ptos}}$$

A partir de esto se obtiene el resultado pedido usando la fórmula que define la curvatura

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{N}. \qquad \boxed{\textbf{0.5 ptos}}$$

Solución (b)

Derivando la fórmula de la parte a) con respecto a s obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^3} = \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\,\mathbf{N} + \kappa\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \qquad \boxed{\textbf{1.0 ptos}}$$

Aplicando la fórmula de Frenet -Serret se obtiene que

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^3} = \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\,\mathbf{N} + \kappa\big(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\big)\,. \qquad \boxed{\textbf{1.0 ptos}}$$

Puesto que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{N}\cdot\mathbf{B} = 0$ y $\|\mathbf{B}\| = 1$ $\boxed{\textbf{0.5 ptos}}$

Finalmente se obtiene que

$$\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^3}\cdot\mathbf{B} = \kappa\,\tau\|\mathbf{B}\|^2 = \kappa\,\tau\,. \qquad \boxed{\textbf{0.5 ptos}}$$

MAT–1630 - CALCULO III
INTERROGACIÓN 2
Primer Semestre 2019

1. Calcule el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F} = (P, Q)$ donde

$$P(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2} + x^3\,, \qquad Q(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + y^4\,,$$

sobre una partícula de masa m que se desplaza en el semiplano superior en la curva que comienza con el segmento rectilíneo desde $(-1,1)$ hasta $(-2,0)$, luego por la curva $y = \sqrt{4-x^2}$ hasta el punto $(2,0)$ y luego por un segmento rectilíneo hasta el punto $(2,2)$.

Solución.

Llamemos Γ al camino descrito que une los puntos $P_1 : (-1,1)$,$P_2 : (-2,0)$, $P_3 : (2,0)$, $P_4 : (2,2)$. El trabajo pedido es la suma de cada trabajo en cada tramo del camino $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3}\right) \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\,.$$

Afirmamos que el campo es conservativo, es decir, $\mathbf{F} = \nabla V := (V_x, V_y)$ con $V(x,y)$ un potencial suave y luego la integral es la evaluación del potencial en los extremos de la curva puesto que

Argumenta **1.0 ptos**

el único punto singular del cammpo es el (0,0) , y la curva no pasa por ese punto. singularidad **1.0 ptos**

Para obtener V se plantea las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$V_x = P(x,y) \Rightarrow V(x,y) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \frac{1}{4}x^4 + C(y)$$ Calcula V **1.0 ptos**

Para determinar $C(y)$ derivamos con respecto a y

$$V_y = -\frac{y}{x^2+y^2} + C'(y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + y^4 \Rightarrow C(y) = \frac{1}{5}y^5$$ Calcula $C(y)$ **1.0 ptos**

De esta manera el potencial es

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}y^5\,.$$ Explicita V **0.5 ptos**

Por lo tanto el trabajo entre P_1 y P_2 ; entre P_2 y P_3 , P_3 y P_4 corresponde a

$$\int_{\Gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_2) - V(P_1); \quad \int_{\Gamma_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_3) - V(P_2); \quad \int_{\Gamma_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_4) - V(P_3);\,.$$

(alternativo: Cada integral **0.5 ptos** solo en caso que no plantee la integral de abajo))

Es decir, sumando los trabajos en cada camino se obtiene que el trabajo total es:

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_4) - V(P_1) = 4 + \frac{32}{5} - \frac{9}{20} - \ln 2$$ Resultado **1.5 ptos**

2. Considere el campo $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde C es

   a) la circunferencia centrada en el origen de radio $\frac{1}{2}$ con orientación positiva (contra manecillas del reloj).

   b) el hexágono regular centrado en el origen orientado en forma positiva con un vértice en $(1,0)$.

Solución. a) Una parametrización de la curva C: $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$. Parametriza C **1.0 ptos**

Por definición de integral de línea $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt$. Define integral de línea **0.5 ptos**

Calculando:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (8\cos t\sin t, 4\sin^2 t - 4\cos^2 t)\,, \qquad \mathbf{r}'(t) = (-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}\cos t)$$

Por lo tanto $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot r'(t) = -2\cos t$. Calcula $F(r(t))\cdot r'(t)$ **0.5 ptos**

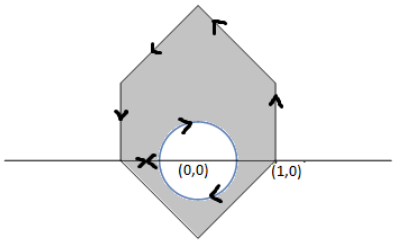
Así que obtiene que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} -2\cos t = 0$. Calcula integral **1.0 ptos**

Solución. b) Si $P(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ y $Q(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ notamos que

$$P_y = \frac{2x^3 - 6xy^2}{x^2+y^2} = Q_x\,.$$ Verifica la propiedad **0.5 ptos**

No podemos usar el teorema de Green en $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ya que $\mathbf{F}$ no tiene derivadas parciales continuas en la región que encierra C ($\mathbf{F}$ no esta definida en $(0,0)$.) Describe la singularidad **0.5 ptos**

Luego aplicamos el teorema de Green en la región D comprendida entre C y C_1, siendo esta última la circunferencia centrada en el origen de radio $\frac{1}{2}$, ya trabajada en el item anterior. Construye camino adecuado(para usar Green) **0.5 ptos**



Por el teorema de Green aplicado a la región D, con el camino orientado como muestra la figura (la singularidad (0,0) no está en D) se obtiene que

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_D (Q_x - P_y)dA = 0\,.$$ Obtiene igualdad por Green **1.0 ptos**

Se concluye, por parte a) que $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$. Explicita resultado **0.5 ptos**

Solución 2. (Alternativa.) Se puede calcular un potencial $V(x,y)$ tal que $\mathbf{F}(x,y) = \nabla V$,

$$V(x,y) = \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\,. \qquad \boxed{\text{Encuentra } V \textbf{ 2.0 ptos}}$$

Luego como el camino no contiene a la singularidad (0,0) y el campo es C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la integral de línea es $\boxed{\text{Explicita resultado } \textbf{2.0 ptos}}$

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}(\text{Punto final}) - \mathbf{F}(\text{Punto inicial}) \qquad \boxed{\text{Plantea la igualdad (TFC) } \textbf{1.0 ptos}}$$

Como ambas curvas C son cerradas, las integrales son cero. $\boxed{\text{Aplica } \textbf{1.0 ptos}}$

3. Considere C una curva suave parametrizada por longitud de arco $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $x(t), y(t), z(t)$ funciones definidas en $[a, b]$ con dos derivadas continuas, $a < b$. Calcule

$$a) \int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r} \qquad\qquad b) \int_C \mathbf{r} \times \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}$$

Solución. a) La curva tiene tangente en todo punto por tener derivada (es suave) Aplicando la definición de integral de línea se obtiene entonces que

$$\int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (x''(t), y''(t), z''(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt$$ Desarrolla integral de línea **0.5 ptos**

Luego,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b (x''(t)\, x'(t) + y(t)''\, y'(t) + z(t)''\, z'(t))\, dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x'(t))^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y'(t))^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z'(t))^2 \right) dt \end{aligned}$$ Simplifica derivada **0.5 ptos**

Luego, por las propiedades de la integral y de la derivada $\dfrac{d}{dt}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d}{dt} \|\mathbf{r}'(t)\|^2\, dt \end{aligned}$$ Explicita igualdad **1.0 ptos**

Como $\mathbf{r}$ es una parametrización por longitud de arco, $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, es decir, $\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = 1$ para todo t. **0.5 ptos**

Luego, $\dfrac{d}{dt}\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = 0$ para todo t. De esta manera se obtiene que $\int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r} = 0$. Concluye **0.5 ptos**

Solución. b) Por definición,

$$\int_C (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} = \int_C (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}'\, dt$$ Concluye **1.0 ptos**

Pero, el vector $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ es siempre perpendicular a cada una de sus componentes, es decir, $(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' = 0$ para todo t. Argumenta integrando es cero **1.5 ptos**

Luego, $\int_C (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} = 0$ Concluye **0.5 ptos**.

4. Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, cerrada y simple en el plano, $\mathcal{R}$ la región acotada limitada por ella.

   a) Utilizando el Teorema de Green demuestre que el área de $\mathcal{R}$ está dada por

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} xdy - ydx.$$

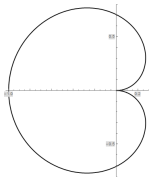
   b) Calcule el área de la región acotada limitada por la curva dada en coordenadas polares : $r = \cos(\theta/2)$, donde $\pi \leq \theta \leq 3\pi$.

Solución. a) Elijamos el campo $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$. Construye V **1.0 ptos**
Este campo $\mathbf{F} = (P,Q)$ es derivable con continuidad (C^1) en todo $\mathbb{R}^2$. Entonces se puede aplicar el Teorema de Green, se obtiene que Verifica hipótesis **1.0 ptos**

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} xdy - ydx &= \int\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) \quad \text{Aplica Green } \mathbf{0.5\ ptos}\\ &= 2\int\int_{\mathcal{R}} dxdy\\ &= = 2\text{Area}\,(\mathcal{R})\,. \quad \text{Explicita respuesta } \mathbf{0.5\ ptos}\end{aligned}$$

Solución. b) Una parametrización en coordenadas cartesianas es

$x(\theta) = r\cos(\theta) = \cos(\theta/2)\,\cos(\theta)\,,\qquad y(\theta) = r\text{sin}(\theta) = \cos(\theta/2)\sin(\theta)$ Parametriza curva **1.0 ptos**



Dibujo **0.5 ptos**
Por parte a):

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} xdy - ydx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi} (x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta))\,d\theta \quad \text{Desarrollo } \mathbf{0.5\ ptos}\\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi} (\cos(\theta/2)\,\cos(\theta)y'(\theta) - \cos(\theta/2)\sin(\theta)x'(\theta))d\theta \quad \text{Desarrollo } \mathbf{0.5\ ptos}\\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi} (\cos^2\theta\cos^2(\theta/2) + \text{sen}^2\,\theta\cos^2(\theta/2)d\theta \quad \text{Desarrollo } \mathbf{0.5\ ptos}\\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi} \cos^2(\theta/2)\,d\theta\\ &= \frac{\pi}{2} \quad \text{Explicita resultado } \mathbf{0.5\ ptos}\end{aligned}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
11 junio 2019

MAT–1630 - CALCULO III
INTERROGACIÓN 3
Primer Semestre 2019

1. Considere la superficie S obtenida al girar una vuelta completa en torno al eje OX la curva γ parametrizada en coordenadas polares por : $(\theta, r)\ :\ r = 1+\theta$ con $0 \le \theta \le \pi$.

   a) Parametrice la superficie S.
   b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $Q := (0, 0, 1+\pi/2)$.

Solución. a) Las coordenadas cartesianas de γ son

$$x = (1+\theta)\cos\theta\,, \qquad y = (1+\theta)\text{sen}\ \theta$$ Calcula x, y cartesianas **1.0 ptos**

Al girar en un ángulo u con respecto al eje OX se obtiene la parametrización de la superficie de revolución S

$$x(\theta,u) = (1+\theta)\cos\theta\,, \qquad y(\theta,u) = (1+\theta)\text{sen}\,\theta\,\cos u, \qquad z(\theta,u) = (1+\theta)\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,u$$

Explicita una parametrización de S **1.5 ptos**

Solución. b)

Llamemos $\varphi(\theta,u) = (x(\theta,u), y(\theta,u), z(\theta,u))$ la parametrización de S.

Entonces $Q = \varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) := \varphi(q)$. Explicita el punto Q en la parametrización **0.5 ptos**

Sabemos que el vector normal a S en Q es $\varphi_\theta(q) \times \varphi_u(q)$, vector normal del plano tangente a S en Q.

Calculando,

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(q) &= (x_\theta(q), y_\theta(q), z_\theta(q)) = (-(1+\tfrac{\pi}{2}), 0, 1) \\ \varphi_u(q) &= (x_u(q), y_u(q), z_u(q)) = (0, -(1+\tfrac{\pi}{2}), 0) \end{aligned}$$

Calcula vectores tangentes l.i. **1.0 ptos**

Como $\varphi_\theta(q)$ y $\varphi_u(q)$ son no nulos y li, la normal del plano tangente es $\varphi_\theta(q) \times \varphi_u(q)$:

$$\varphi_\theta(q) \times \varphi_u(q) = ((1+\tfrac{\pi}{2}), 0, (1+\tfrac{\pi}{2})^2)\,.$$ Calcula normal plano tangente **1.0 ptos**

De esta manera la ecuación del plano tangente a S en $Q = (0, 0, 1+\pi/2)$ es

$$x(1+\tfrac{\pi}{2}) + \big(z - (1+\tfrac{\pi}{2})\big)\,(1+\tfrac{\pi}{2})^2 = 0 \ \Rightarrow\ x + (1+\tfrac{\pi}{2})z = (1+\tfrac{\pi}{2})^2\,.$$ Encuentra ecuación plano tangente **1.0 ptos**

2. Sea S la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=25$ bajo el plano $z=4$ orientada de modo tal que el vector normal en $(5,0,0)$ es $\hat{\imath}$ y se define el campo vectorial $F(x,y,z)=-y\hat{\imath}+x\hat{\jmath}+z\hat{k}$. Utilizando el Teorema de Stokes calcule $\int\int_S \mathrm{rot}F\cdot dS$.

Solución.

Notemos que el borde de S, que denotamos por C, es el círculo $x^2+y^2+4^2=25$ o equivalentemente $x^2+y^2=9$ en el plano $z=4$. Describe la frontera (o borde) **1.0 ptos**

La función $r(t)=(3\cos t,\, 3\,\mathrm{sen}\, t,\, 4)$ parametriza la curva $-C$.

Parametriza borde con orientación correcta **1.0 ptos**

En términos de esta parametrización tenemos que

$$F(r(t))=(-3\,\mathrm{sen}\, t,\, 3\cos t,\, 4)\,.$$ Calcula campo en el borde **1.0 ptos**

Por lo tanto,

$$F\cdot dr=(-3\,\mathrm{sen}\, t,\, 3\cos t,\, 4)\cdot(-3\,\mathrm{sen}\, t,\, 3\cos t,\, 0\,)dt=9\,dt\,.$$ Calcula $F\cdot dr$ **1.0 ptos**

Así se obtiene que

$$\int_{-C} F\cdot dr=\int_0^{2\pi} 9\,dt=18\pi\,.$$ Calcula integral de línea **0.5 ptos**

Aplicando el Teorema de Stokes:

$$\int\int_S \mathrm{rot}F\cdot dS=\int_C F\cdot dr$$ Aplica Stokes **0.5 ptos**

$$\int\int_S \mathrm{rot}F\cdot dS=\int_C F\cdot dr=-\int_{-C} F\cdot dr=-18\pi\,.$$ Explicita solución **1.0 ptos**

3. Se define el campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(4x^3\,,\, \frac{-z}{y^2+z^2}\,,\, \frac{y}{y^2+z^2}\right)$.

   a) Demuestre que $\vec{F}$ es conservativo en la región $\{\,(x,y,z) : z > 0\,\}$.

   b) Sea C la curva que resulta de intersectar las esferas

   $$(x+8)^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25\,.$$

   Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (elija libremente una orientación para C).

   c) ¿Es $\vec{F}$ conservativo en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : y = z = 0\}$?

Solución. a) La primera componente del rotacional (rotor) $\nabla \times F$ es

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{y^2+z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-z}{y^2+z^2}\right) &= \frac{1\cdot(y^2+z^2) - y\cdot 2y + 1\cdot(y^2+z^2) - z\cdot 2z}{(y^2+z^2)^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Primera componente rotor **0.5 ptos**

La segunda componente es

$$\frac{\partial}{\partial z}(4x^3) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{y^2+z^2}\right) = 0.$$

Segunda componente rotor **0.5 ptos**

La tercera es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-z}{y^2+z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(4x^3) = 0.$$

Tercera componente rotor **0.5 ptos**

Al ser su rotacional siempre cero, y al tratarse de un dominio en donde

- $\vec{F}$ no tiene singularidades — Explicita F no singular en dominio **0.5 ptos**
- la curva cerrada es la frontera de una superficie orientable contenida en el dominio,

  Superficie en el dominio **0.5 ptos**

Se concluye que $\vec{F}$ es conservativo en $\{(x,y,z) : z > 0\}$. — Concluye **0.5 ptos**

Solución. b) Las esferas se intersecan en la circunferencia de radio 3 centrada en el punto de coordenadas $(-4,0,0)$, la cual puede parametrizarse como — Reconoce intersección **0.5 ptos**

$\vec{r}(t) = (-4, 3\cos t, 3\mathrm{sen}\, t), \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$ — Exhibe parametrización intersección **0.5 ptos**

La integral de línea es

$$\int_0^{2\pi} (4^4, \frac{-3\,\mathrm{sen}\, t}{9}, \frac{3\cos t}{9})\cdot(0, -3\,\mathrm{sen}\, t, 3\,\cos t)\, dt = 2\pi\,.$$

Calcula integral de línea **1.0 ptos**

La integral puede ser -2π si elige la otra orientación en la parametrización de C.

Solución. c) Si $\vec{F}$ fuera conservativo entonces la última integral debiera haber sido cero pues la curva es cerrada.

Se concluye entonces que el campo $\vec{F}$ no es conservativo. — Argumento no conservativo **1.0 ptos**

4. Sea $\vec{F}$ un campo diferenciable en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (no necesariamente definido en 0). Considere

$$S^+ := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, y \geq 0\}, \quad S^- := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, y \leq 0\}$$

y $\vec{n}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$.

a) Demuestre que $\iint_{S^+} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S^-} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde ambas integrales están orientadas de acuerdo a la dirección paralela a $\vec{n}$.

b) Sea $\vec{G}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$. Demuestre que no existe un campo $\vec{F}$ tal que $\vec{G} = \nabla \times \vec{F}$.

Solución. a) Sea C la curva parametrizada dada por

$$\vec{r}(t) := (\cos t, 0, \text{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Si recorremos la curva C (en la dirección indicada por esa parametrización) con nuestra cabeza apuntando en la dirección del normal $\vec{n}$ que define la orientación que le hemos dado a las superficies S^+ y S^-, vemos que S^- queda a nuestra izquierda y S^+ queda a nuestra derecha. Si, en cambio, recorremos C en el sentido contrario, la que queda a nuestra izquierda es ahora S^+.

Explicita las direcciones de las fronteras **1.0 ptos**

El teorema de Stokes aplicado a S^+ afirma entonces que

$$\iint_{S^+} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

Aplica Stokes a S^+ **1.0 ptos**

donde C^- representa a C recorrida en el sentido contrario,
Por otro lado, aplicando Stokes a S^- se tiene que

$$\iint_{S^-} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Aplica Stokes a S^- **1.0 ptos**

Como $\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, se cumple la igualdad pedida. Propiedad de integral de línea **1.0 ptos**

Solución. b) Si $\vec{G}$ fuera el rotacional de un campo $\vec{F}$ se tendría, por la parte a), que

$$\iint_{S^+} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S^-} \vec{G} \cdot d\vec{S}.$$

Sin embargo, es posible ver que esto no se cumple.

Se calcula que $\vec{G} \cdot \vec{n} = 1$ Calcula $\vec{G} \cdot \vec{n}$ **1.0 ptos** en todo punto sobre las superficies.

Por lo tanto, en los dos casos el valor de la integral sería el área de la superficie, puesto que por definición

$$\iint_{S^+} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_{S^+} \vec{G} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S^+} 1 dS = \text{Area}(S^+) \ ,$$

Calcula integral de superficie **0.5 ptos**

Similarmente, $\iint_{S^-} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \text{Area}(S^-)$, siendo imposible que las integrales tengan signos contrarios. Concluye **0.5 ptos**

MAT–1630 - CALCULO III
EXAMEN
Primer Semestre 2019

1. Considere la superficie S que se genera al rotar con respecto al eje OY el trazo de recta que comienza en $(1,0,0)$ y termina en $(2,2,0)$.

   a) Parametrice S.

   b) Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F} = (z, y, x)$ a través de S, con sus normales apuntando hacia la región no encerrada por S.

Solución. a) Como S es una superficie de revolución una parametrización posible es:

$$x(u,t) = u\cos t\,, \quad y(u,t) = 2(u-1)\,, \quad z(u,t) = u\,\mathrm{sen}\,t$$

con D la región dada por $D = \{(u,t) : 1 \le u \le 2\,,\ 0 \le t \le 2\pi\}$. Explicita parametrización **2.0 ptos**

Solución. b) De lo anterior obtenemos que

$$r_u = (\cos t, 2, \sin t)\,, \quad r_t = (-u\,\mathrm{sen}\,t, 0, u\cos t)\,.$$ Calcula derivadas de r **1.0 ptos**

Luego la normal a S en $Q = (x(u,t), y(u,t), z(u,t))$ está dada por

$$\vec{n}(u,t) = r_u \times r_t = (2u\cos t, -u, 2u\,\mathrm{sen}\,t)\,.$$ Calcula normal **0.5 ptos**

Notamos que la segunda coordenada y es negativa cuando $1 \le u \le 2$, por lo que esa normal apunta hacia afuera. Justifica correcta dirección de normal **0.5 ptos**

Por lo tanto, el flujo $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ se calcula:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (u\,\mathrm{sen}\,t, 2(u-1), u\cos t)\cdot(2u\cos t, -u, 2u\,\mathrm{sen}\,t)\,dt\,du \quad \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos}\\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_1^2 u^2\,\mathrm{sen}\,2t\,dt\,du + \int_0^{2\pi}\int_1^2 (-2u^2+2u)\,dt\,du \quad \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos}\\
&= 2\pi\int_1^2 (-2u^2+2u)\,dt\,du \quad \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos}\\
&= -\frac{10}{3}\pi\,. \quad \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos}
\end{aligned}$$

2. Una partícula se mueve en $\mathbb{R}^3$ a lo largo del camino cerrado C, compuesto por segmentos de rectas, que empieza en el origen y sigue al punto $P_1 = (1,0,0)$, continua al punto $P_2 = (1,2,1)$, sigue al punto $P_3 = (0,2,1)$ volviendo finalmente al origen; bajo la influencia del campo de vectores $\vec{F}(x,y,z) = (z^2, 2xy, 4y^2)$. Calcule el trabajo realizado.

Solución. El trabajo realizado está dado por la integral de línea $T = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Usaremos el Teorema de Stokes:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

donde R es el pedazo de plano limitado por el cuadrilátero de vértices $\vec{0}$, P_1, P_2, P_3.

Plantea Stokes con frontera correcta **1.0 ptos**

Calculamos el plano que contiene a estos puntos. Su normal es $(1,0,0) \times (0,2,1) = (0,-1,2)$.

Normal plano **0.5 ptos**

Por lo tanto, la ecuación del plano es $2z = y$. Explicita ecuación plano **1.0 ptos**

Luego una parametrización para región R es:

$r(x,y) = (x, y, y/2)$ con $D: 0 \le x \le 1\,, 0 \le y \le 2\,.$ Parametriza región **0.5 ptos**

con normal de la parametrización $\vec{n} = (0, -1/2, 1)$ Da normal de la parametrización **0.5 ptos**

El rotor del campo es $(\nabla \times \vec{F}) = (8y, 2z, 2y)$ Calcula rotor **1.0 ptos**

Calculamos la integral de superficie:

$$\begin{aligned} \iint_R (\nabla \times \cdot \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \frac{3}{2} \iint_D y\, dA && \text{Aplica Stokes } \mathbf{0.5\ ptos} \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 dx \int_0^2 y\, dy && \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos} \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 y\, dy = 3. && \text{Calcula } \mathbf{0.5\ ptos} \end{aligned}$$

Solución. Alternativa.

Descomponer el camino en $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ y calcular la integral de línea de cada pedazo,

$$T = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$ Descompone la integral **1.0 ptos**

Resultados:

$$I_1 = 0\,, \quad I_2 = 4 + \frac{16}{3}\,, \quad I_3 = -1\,, \quad I_4 = -\frac{16}{3}\,.$$

Integrales de línea I_1, I_3. Cada una **1.0 ptos** No hay puntaje parcial.

Integrales de línea I_2, I_4. Cada una **1.5 ptos** No hay puntaje parcial.

3. Considere la superficie en $\mathbb{R}^3$: $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2\,, 1 < z < 9\,, y > 0\}$.

   a) Determine la ecuación del plano tangente a S en $(1, 1, 2)$.

   b) Calcule el área de S.

Solución. Parte a) Una parametrización de S es $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ con

$$x(u, v) = u\,, \quad y(u, v) = v\,, \quad z(u, v) = u^2 + v^2$$

con $D = \{(u, v) : 1 < u^2+v^2 < 9\,, v > 0\}$. Parametriza S **1.0 ptos**

El punto $Q = (1, 1, 2)$ se obtiene con $r(1, 1) = (1, 1, 2)$. Identifica Q **0.5 ptos**

Luego, la normal a S es $r_u \times r_v = (1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v) = (-2u, -2v, 1)$.
La normal en el punto $(1, 1, 2)$ es por lo tanto $(-2, -2, 1)$ Calcula normal **0.5 ptos**

El plano tangente pedido es

$(x-1, y-1, z-2)\cdot(-2, -2, 1) = 0 \iff z-2x-2y+2 = 0\,.$ Explicita ecuación plano **1.0 ptos**

Solución. Parte b)

$$A(S) \;=\; \iint_S dS = \iint_D \|r_u \times r_v\|\, du\, dv \;=\; \iint_D \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\, du\, dv\,.$$

Representa área como integral doble **1.0 ptos**

Ahora se calcula la integral mediante el cambio de variable $u = r\cos\theta\,,\ v = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\, du\, dv &= \int_0^{\pi}\int_1^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta && \text{Cambio de variable } \mathbf{1.0\ ptos}\\
&= \pi \int_1^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr && \text{Calcula integral } \mathbf{0.5\ ptos}\\
&= \frac{\pi}{12}(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5})\,. && \text{Respuesta exacta } \mathbf{0.5\ ptos}
\end{aligned}$$

4. Sea $\mathcal{B}$ la región en $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Utlilice el Teorema de la Divergencia para calcular $\iiint_{\mathcal{B}} z^2 dV$.

Solución.

Sea S la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$. Por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\iiint_{\mathcal{B}} z^2 dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

para cualquier campo de vectores $\vec{F}$ cuya divergencia es z^2. Plantea Teorema Divergencia **1.0 ptos**

En particular podemos elegir $\vec{F} = \frac{1}{3}\, z^3\, \hat{k}$ con $\hat{k} = (0,0,1)$. Elección de campo vectorial **1.0 ptos**

Es decir,

$$\iiint_{\mathcal{B}} z^2 dV = \iint_S \frac{1}{3}\, z^3 \hat{k} \cdot d\boldsymbol{S}\,. \qquad \text{Aplica a Teo. Divergencia } \textbf{0.5 ptos}$$

Ahora debemos calcular la integral de superficie en la última igualdad. Consideremos la siguiente parametrización de la esfera S

$$x(\theta,\phi) = \cos\theta\cos\phi, \quad y(\theta,\phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad z(\theta,\phi) = \operatorname{sen}\phi,$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$. Explicita parametrización **1.0 ptos**

Se calcula que el elemento de área es:

$$d\boldsymbol{S} = (\cos^2\phi\,\cos\theta, \cos^2\phi\,\operatorname{sen}\theta, \cos\phi\,\operatorname{sen}\phi)\, dA\,, \quad dA = d\theta\, d\phi\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{1}{3} z^3 \hat{k} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}\phi)^3(\cos\phi\,\operatorname{sen}\phi)\, d\phi\, d\theta \qquad \text{Calcula integral } \textbf{1.0 ptos} \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\phi\cos\phi\, d\phi \qquad \text{Calcula integral } \textbf{0.5 ptos} \\
&= \frac{4\pi}{15} \qquad \text{Calcula y explicita respuesta } \textbf{1.0 ptos}
\end{aligned}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2016

MAT1630 $*$ Cálculo 3

1. Considere la región $\mathcal{R}$ acotada y delimitada por las curvas.

$$y = \sin(x), \quad y = \cos(x) + 1, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calcular el centro de masa de la región $\mathcal{R}$.

Solución. Las coordenadas del centro de masa están dadas por

$$\overline{x} = \frac{\int_0^{\pi/2} x(\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx}{\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx} \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1)^2 - (\sin(x))^2\, dx}{\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx}$$

donde

$$\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\pi/2} x(\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx = \frac{1}{8}(-16 + 4\pi + \pi^2)$$
$$\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1)^2 - (\sin(x))^2\, dx = \frac{4 + \pi}{2}$$

por lo tanto, las coordenadas del centro de masa son Las coordenadas del centro de masa están dadas por

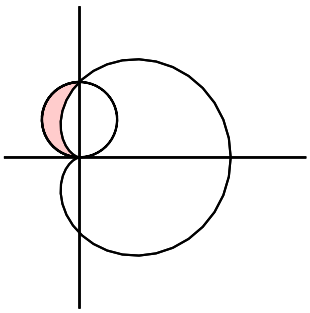
$$\overline{x} = \frac{\frac{1}{8}(-16 + 4\pi + \pi^2)}{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{\frac{4 + \pi}{4}}{\frac{\pi}{2}}$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por calcular $\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx$.
- Asignar (**2 pto**) por calcular $\int_0^{\pi/2} x(\cos(x) + 1 - \sin(x))\, dx$.
- Asignar (**2 pto**) por calcular $\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos(x) + 1)^2 - (\sin(x))^2\, dx$.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar cada coordenada del centro de masa.

2. Sea $\mathcal{R}$ la región que se encuentra al exterior de la curva polar $r = 1 + \cos(\theta)$ y al interior de la curva polar $r = \sin(\theta)$. Calcular el perímetro de la región $\mathcal{R}$.

Solución. La gráfica de ambas curvas polares está dada por



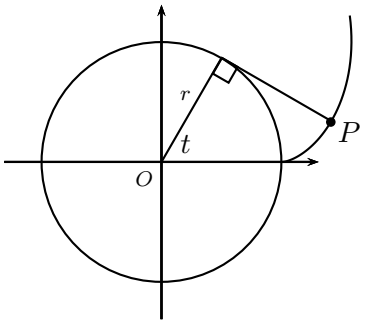
donde la región $\mathcal{R}$ ha sido coloreada. El perímetro de la curva corresponde a una sección de circunferencia y una sección del cardioide, ambas comprendidas para t entre $\pi/2$ y π. De este modo el perímetro de la región está dado por

$$\begin{aligned}&\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{(1+\cos(t))^2 + \sin^2(t)}\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\sin(t)^2 + \cos^2(t)}\, dt \\ &= \left(4 - 2\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

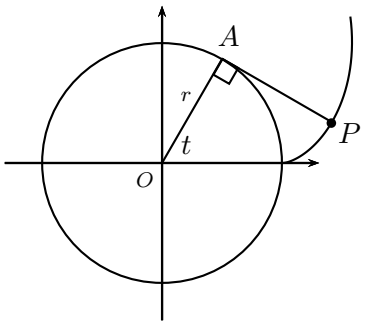
Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por determinar explícita o implícitamente (como índices de la integral) en qué intervalo se debe(n) calcular la(s) integral(es).
- Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{(1+\cos(t))^2 + \sin^2(t)}\, dt$
- Asignar (**2 ptos**) por determinar (o calcular) que el perímero de la región $\mathcal{R}$ comprendida en la circunferencia corresponde a $\dfrac{\pi}{2}$.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar el perímetro.

3. Se enrolla una cuerda alrededor de un círculo y luego se desenrolla mientras se mantiene tensa (ver la figura). El círculo tiene radio r y centro O, y la posición inicial de P es $(r, 0)$. Determine las coordenadas del punto P como función del ángulo t de la figura.



Solución. Consideremos la figura



El segmento $\overline{AP}$ mide el perímero de la sección circular asociada al ángulo t, vale decir

$$AP = t \cdot r$$

Las coordenadas del punto P corresponden al vector $\overrightarrow{OP}$, luego

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

y por tanto las coordenadas de P están dadas por

$$(x, y) = r(\cos(t), \sin(t)) + t \cdot r(\sin(t), -\cos(t))$$

es decir,

$$x = r(\cos(t) + t\sin(t)) \qquad \text{e} \qquad y = r(\sin(t) - t\cos(t))$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar la medida del segmento $\overline{AP}$.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar la coordenada x del punto P.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar la coordenada y del punto P.

4. Considere las superficies

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 = y^2 - z^2\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) \mid x + z = 2\}.$$

(a) Determine una parametrización para la curva intersección entre las superficies S_1 con S_2.

(b) Calcular el vector tangente unitario T a la curva en el punto $(1, \sqrt{2}, 1)$.

Solución.

Alternativa 1. Si suponemos que $x = \rho\cos(t)$ y $z = \rho\sin(t)$ entonces de la ecuación que determina a S_1 se obtiene que

$$y^2 = \rho^2$$

De la ecuación que determina a S_2 se obtiene que

$$\rho = \frac{2}{\cos(t) + \sin(t)}$$

por lo tanto una parametrización para la curva es

$$x = \frac{2}{\cos(t) + \sin(t)}\cos(t), \qquad y = \frac{4}{(\cos(t) + \sin(t))^2}, \qquad z = \frac{2}{\cos(t) + \sin(t)}\sin(t)$$

Alternativa 2. Si suponemos que $y = r\cosh(t)$ y $z = r\sinh(t)$ entonces de la ecuación que determina a S_1 se obtiene que

$$x^2 = r^2$$

De la ecuación que determina a S_2 se obtiene que

$$r = \frac{2}{\pm 1 + \sinh(t)}$$

por lo tanto una parametrización para la curva es

$$x = \frac{4}{(\pm 1 + \sinh(t))^2}, \qquad y = \frac{2}{\pm 1 + \sinh(t)}\cosh(t), \qquad z = \frac{2}{\pm 1 + \sinh(t)}\sinh(t)$$

Alternativa 3. Como $x = 2 - z$, entonces

$$(2 - z)^2 = y^2 - z^2 \;\Rightarrow\; 4 - 4z + 2z^2 = y^2 \;\Rightarrow\; 1 = \frac{y^2}{2} - (z - 1)^2.$$

Tal curva corresponde a una hipérbola, así si elegimos

$$y(t) = \sqrt{2}\cosh(t),\; z(t) = \sinh(t) + 1,\; x(t) = 1 - \sinh(t).$$

Ahora calculamos el tangente en $(1, \sqrt{2}, 1)$. Sin pérdida de generalidad, dada la parametrización

$$x = \frac{2}{\cos(t) + \sin(t)}\cos(t), \qquad y = \frac{4}{(\cos(t) + \sin(t))^2}, \qquad z = \frac{2}{\cos(t) + \sin(t)}\sin(t)$$

en $t = \pi/4$ se obtiene el punto $(1, \sqrt{2}, 1)$. Luego

$$x' = -\frac{2}{(\cos(t) + \sin(t))^2}, \qquad y' = -8\frac{\cos(t) - \sin(t)}{(\cos(t) + \sin(t))^3}, \qquad z' = \frac{2}{(\cos(t) + \sin(t))^2}$$

de donde se deduce que el tangente en $t = \pi/4$ es

$$(-1, 0, 1)$$

y por tanto el tangente unitario será

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por cada coordenadas en la parametrización.
- Asignar (**0.5 ptos**) calcular la derivada de cada coordenada en la parametrización.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar en qué valor del parámetro se está en el punto $(1, \sqrt{2}, 1)$.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar el tangente unitario.

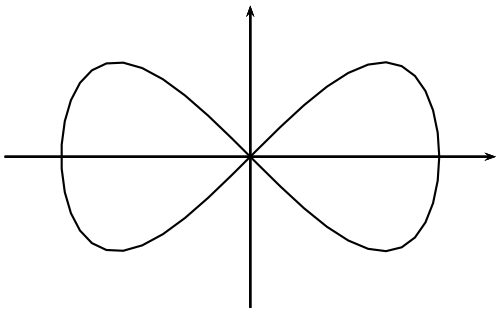
5. Considere la curva de ecuaciones paramétricas $x = \cos(t)$ e $y = \cos(t)\sin(t)$.

   (a) Trace la gráfica de la curva paramétrica para $t \in [0, 2\pi]$. Identifique los puntos de intersección con los ejes coordenados, intervalos de crecimiento y concavidad.

   (b) Determine el área encerrada por la curva.

Solución.

(a) La gráfica es



(b) Por la simetría de la gráfica se desprende que el área pedida está dada por

$$A = 4\left|\int_0^{\pi/2} y(t)x'(t)\,dt\right| = \frac{4}{3}$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por una gráfica aproximada a la propuesta en esta pauta (que se vean dos loops que pasan por el origen y sean simétricos respecto al eje X).
- Asignar (**1 ptos**) por determinar ALGÚN intervalo que permita calcular el área pedida. (ejemplo $[0, \pi/2]$, $[0, \pi]$, etc)
- Asignar (**2 ptos**) por calcular correctamente la integral propuesta, siempre y cuando representa 1/4, 1/2 o 1 del área total pedida. Para ello el alumno debe evidenciar explícita o implícitamente que parte del área está calculando. En caso contrario no se otorgará puntaje.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular el área POSITIVA. Si el resultado es negativo y no hace el cambio de signo, no se otorgará puntaje.

6. Calcular el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar la curva de ecuación $y = x^2$, $x \in [0, 1]$ en torno a la recta $y = x$.

Solución. Aproximando por Riemann, la integral a calcular es

$$2\pi \int_0^1 d(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

siendo $d(x)$ la distancia del punto $(x, f(x))$ a la recta $y = x$ y $f(x) = x^2$. De lo anterior tendremos que el área es

$$2\pi \int_0^1 \frac{x^2 - x}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{\pi(16 - 18\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\text{arcsinh}(\sqrt{2}))}{48\sqrt{2}}$$

Evaluación.

- Asignar (**3 ptos**) por determinar una representación en integral para el área de la superficie: ejemplo $2\pi \int_0^1 \frac{x^2-x}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 4x^2}\, dx$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular la integral $\int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 1/12(-1 + 5\sqrt{5})$
- Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral $\int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 1/64(18\sqrt{5} - \text{arcsinh}(2))$

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2016

MAT1630 $*$ Cálculo 3

1. Considere la curva cicloide de ecuaciones

$$x(t) = t - \sin(t) \qquad \text{y} \qquad y(t) = 1 - \cos(t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

   (a) Determine una parametrización respecto a longitud de arco.

   (b) Calcule la curvatura de la cicloide para $t = \pi$.

Solución.

(a) Comenzaremos determinando s como función de t,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du \\ &= \int_0^t \sqrt{2 - 2\cos(u)}\, du \qquad (\textbf{1 pto}) \\ &= 2\int_0^t \sin(u/2)\, du \\ &= 4(1 - \cos(t/2)) \qquad (\textbf{1 pto}) \end{aligned}$$

Despejando t tendremos

$$t = 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) \qquad (\textbf{1 pto})$$

Por lo tanto, una arcoparametrización respecto a longitud de arco es

$$\begin{aligned} x(s) &= 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) - \sin\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right) \qquad (\textbf{0.5 pto}) \\ y(s) &= 1 - \cos\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right) \qquad (\textbf{0.5 pto}) \end{aligned}$$

(b) Calculemos la curvatura en $t = \pi$,

$$\kappa = \frac{\|\dot{\vec{r}}(\pi) \times \ddot{\vec{r}}(\pi)\|}{\|\dot{\vec{r}}(\pi)\|^3}$$

con $\dot{\vec{r}}(\pi) = (2, 0, 0)$ (**0.5 pto**) y $\ddot{\vec{r}}(\pi) = (0, -1, 0)$ (**0.5 pto**), por lo tanto, la curvatura es

$$\kappa = \frac{1}{4} \qquad (\textbf{1 pto})$$

Evaluación.

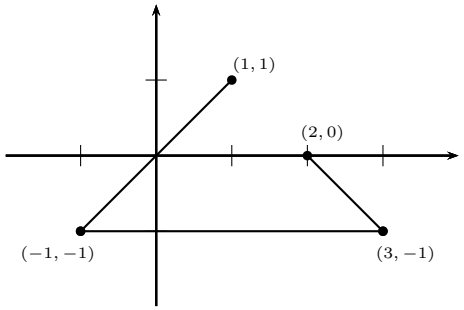
- Si el alumno calcula $T(s)$, a partir de la curva arcoparametrizada, asignar (**1 pto**).
- Si el alumno calcula $\dfrac{d}{ds}T(s)$, a partir de la curva arcoparametrizada, asignar (**0.5 pto**).
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar la curvatura a partir de la curva arcoparametrizada.

2. Considere el campo vectorial

$$F(x,y) = (y\cos(x) + \sin(y) + 1, \sin(x) + x\cos(y))$$

(a) Determine si F es o no un campo conservativo.

(b) Calcule $\int_C F \cdot d\vec{r}$ donde C es la curva que va desde $(1,1)$ hasta $(2,0)$, dada en la siguiente figura:



Solución.

(a) Primero notemos que F está definido en todo $\mathbb{R}^2$, que es una región abierta y simplemente conexa. Además, calculamos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos(x) + \cos(y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos(x) + \cos(y).$$

Por lo cual obtenemos que F es campo conservativo.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por demostrar, con algún método válido, que el campo vectorial es conservativo.

(b) Primera forma: Encontrando potencial y usar el teorema fundamental de las integrales de línea. Necesitamos en contrar función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x,y) = \nabla f(x,y)$. Así, calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) = y\cos(x) + \sin(y) + 1.$$

Entonces,

$$f(x,y) = y\sin(x) + x\sin(y) + x + g(y).$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x) + x\cos(y) + g'(y) = Q(x,y).$$

Entonces $g(y) = c$, con c constante. Por lo tanto,

$$f(x,y) = y\sin(x) + x\sin(y) + x + c.$$

Ahora, usando el Teorema fundamental, tenemos que

$$\int_C F \cdot dr = f(2,0) - f(1,1) = 2 + c - (2\sin(1) + 1 + c) = 1 - 2\sin(1).$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar la función potencial.
- Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral de línea.

Segunda forma: Usando que la integral de línea es independiente de camino.
Sea $\bar{C}$ parametrizada por $r(t) = (1-t)(1,1) + t(2,0), \quad t \in [0,1]$ la recta que va desde $(1,1)$ hasta $(2,0)$. Entonces,

$$\int_C F \cdot dr = \int_{\bar{C}} F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot dr &= \int_0^1 ((1-t)\cos(1+t)+\sin(1-t)+1, \sin(1+t)+(1+t)\cos(1-t))\cdot(1,-1)dt\\ &= \int_0^1 (1-t)\cos(1+t)+\sin(1-t)+1-\sin(1+t)-(1+t)\cos(1-t)dt\\ &= 1-2\sin(1).\end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por una parametrización de una curva que une los puntos.
- Asignar (**1 ptos**) por obtener la integral $\int_C F\cdot r'\,dt$ a calcular.
- Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral de línea.

Tercera forma: Por definición de integral de línea.
Tenemos que

$$\int_C F\cdot dr = \int_{C_1} F\cdot dr + \int_{C_2} F\cdot dr + \int_{C_3} F\cdot dr,$$

donde C_1, C_2, C_3 están parametrizadas por:

$$r_1(t)=(-t,-t),\ t\in[-1,1],\quad r_2(t)=(t,-1),\ t\in[-1,3],\quad r_3(t)=(3-t,t-1),\ t\in[0,1],$$

respectivamente.
Así, calculamos

$$\begin{aligned}\int_{C_1} F\cdot dr &= \int_{-1}^1 (-t\cos(-t)+\sin(-t)+1, \sin(-t)-t\cos(-t))\cdot(-1,-1)dt\\ &= \int_{-1}^1 2t\cos(t)+2\sin(t)-1dt\\ &= -2.\\ \int_{C_2} F\cdot dr &= \int_{-1}^3 (-\cos(t)+\sin(-1)+1, \sin(t)+t\cos(-1))\cdot(1,0)dt\\ &= \int_{-1}^3 -\cos(t)-\sin(1)+1dt\\ &= 4-5\sin(1)-\sin(3).\\ \int_{C_3} F\cdot dr &= \int_0^1 ((t-1)\cos(3-t)+\sin(t-1)+1, \sin(3-t)+(3-t)\cos(t-1))\cdot(-1,1)dt\\ &= \int_0^1 (1-t)\cos(3-t)-\sin(t-1)-1+\sin(3-t)+(3-t)\cos(t-1)dt\\ &= 3\sin(1)+\sin(3)-1.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_C F\cdot dr = 1-2\sin(1).$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por calcular la integral de línea en cada camino. (son tres caminos)
- Asignar (**1 ptos**) por el resultado correcto de la integral de línea.

3. Calcular

$$\int_\Gamma -y\,dx + x\,dy$$

siendo Γ la curva astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Solución. Parametrizamos el astroide:

$$x(t) = \cos^3(t), \quad y(t) = \sin^3(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Entonces,

$$dx = -3\cos^2(t)\sin(t)dt, \quad dy = 3\sin^2(t)\cos(t)dt.$$

Así, calculamos

$$\begin{aligned}\int_C -ydx + xdy &= \int_0^{2\pi} 3\sin^4(t)\cos^2(t) + 3\cos^4(t)\sin^2(t)dt \\ &= 3\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)dt \\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por una parametrización $\vec{r}(t)$ de una curva.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular correctamente $\dot{\vec{r}}(t)$.
- Asignar (**2 ptos**) por obtener la integral $3\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)dt$.
- Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral $3\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)dt$.

4. Calcular
$$\int_\Gamma \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dy + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz$$
siendo Γ la curva paramétrica $(t\cos(t), t\sin(t), t)$ con $t \in [\pi, 2\pi]$.

Solución.

Alternativa 1. Sea
$$I = \int_\Gamma \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dx + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dy + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz.$$

Sea
$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right).$$

Notar que la funcin $f(x,y,z) = -(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisface $\nabla f = F$. Luego, usando el teorema fundamental para integrales de línea tenemos que
$$I = f(2\pi\cos 2\pi, 2\pi\sin 2\pi, 2\pi) - f(\pi\cos\pi, \pi\sin\pi, \pi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}.$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por deducir que $F = \nabla f$, para el f de la solución.
- Asignar (**1 ptos**) por USAR el teorema fundamental de las integrales de línea (no es necesario que haya evaluado)
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $f(2\pi\cos 2\pi, 2\pi\sin 2\pi, 2\pi)$
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $f(\pi\cos\pi, \pi\sin\pi, \pi)$
- Asignar (**1 ptos**) por obtener correctamente el valor de I.

Alternativa 2. Usando la definición de integral de línea tenemos que
$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^{2\pi} \left(\frac{t\cos t(\cos t - t\sin t)}{(2t^2)^{3/2}} + \frac{t\sin t(\sin t + t\cos t)}{(2t^2)^{3/2}} + \frac{t}{(2t^2)^{3/2}}\right) dt \\ &= \int_\pi^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2}t^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**3 ptos**) por obtener que $I = \int_\pi^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2}t^2}$
- Asignar (**3 ptos**) obtener correctamente el valor de I.

5. Determine la masa de un alambre que resulta de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ si la densidad en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$ gramos por unidad de longitud de arco.

Solución. Una parametrización para la curva que representa al alambre es

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{2 + \sin(2t)}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{2 + \sin(2t)}}, -\frac{\sin(t) + \cos(t)}{\sqrt{2 + \sin(2t)}} \right)$$

para $t \in [0, 2\pi]$.

Luego la masa está dada por la integral

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \rho \, ds &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{2 + \sin(2t)}} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2 + \sin(2t)} \, dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{(2 + \sin(2t))^2} \, dt \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por obtener una parametrización.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\|\dot{\vec{r}}(t)\|$.
- Asignar (**2 ptos**) por obtener la integral $\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{(2 + \sin(2t))^2} \, dt$ o una equivalente (con integrando simplificado). Si el alumno da otra parametrización, asignar el puntaje por la integral a calcular siempre que el integrando esté simplificado.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular el valor de la masa.

6. Sea Γ una curva con arcoparametrización $\vec{\alpha}(s)$ y curvatura $\kappa(s)$ no nula que está contenida en un plano. Definamos γ una curva con parametrización

$$\vec{\beta}(s) = \alpha(s) + \frac{\vec{N}(s)}{\kappa(s)},$$

donde $\vec{N}(s)$ es el vector normal a la curva Γ en el punto $\vec{\alpha}(s)$. Demuestre que el vector tangente a la curva γ en el punto $\vec{\beta}(s)$ es paralelo al vector normal a curva Γ en el punto $\vec{\alpha}(s)$.

Solución. Supongamos que α está arcoparametrizada. Luego

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= T(s) + \left(\frac{N(s)}{\kappa(s)}\right)' \\
&= T(s) + \frac{N'(s)\kappa(s) - N(s)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \quad (\tau = 0) \\
&= T(s) + \frac{-\kappa^2(s)T(s) - N(s)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \\
&= \frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}N(s).
\end{aligned}$$

Esto termina la demostración.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por obtener

$$\beta'(s) = T(s) + \frac{N'(s)\kappa(s) - N(s)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}$$

- Asignar (**1 ptos**) por utilizar o mencionar que $\tau = 0$.
- Asignar (**1 ptos**) por utilizar o mencionar que $N'(s) = -\kappa(s)T(s)$.
- Asignar (**1 ptos**) por concluir que $\beta'(s) = \frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}N(s)$
- Asignar (**1 ptos**) por concluir que el tangente a la curva γ es paralelo al normal de la curva Γ.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2016

MAT1630 ⋆ Cálculo 3

Interrogación 3

1. Calcular la integral de flujo en el plano

$$\int_\Gamma F \cdot N \, ds$$

siendo $F = (x^3, y^3)$ y $\Gamma : x^2 + y^2 = 1$, con N la normal unitaria apuntando hacia afuera.

Solución. Aplicando el teorema de la divergencia tendremos

$$\int_\Gamma F \cdot N \, ds = \int_U \nabla \cdot F \, dA = \int_U (3x^2 + 3y^2) \, dx \, dy$$

siendo $U : x^2 + y^2 \leq 1$. Haciendo el cambio de variable $x = \rho\cos(t)$ e $y = \rho\sin(t)$, para $0 \leq \rho \leq 1$ y $0 \leq t \leq 2\pi$, tendremos

$$\iint_U (3x^2 + 3y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3\rho^2 \rho \, d\rho \, dt = \frac{3\pi}{2}$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente la divergencia de F.
- Asignar (**1 pto**) por obtener la integral $\int_U (3x^2 + 3y^2) \, dx \, dy$, sin necesidad de explicitar quien es U.
- Asignar (**1 pto**) por sugerir el cambio de variable en coordenadas polares.
- Asignar (**1 pto**) por obtener la integral $\int_0^{2\pi} \int_0^1 3\rho^2 \rho \, d\rho \, dt$ o una equivalente. Si un alumno llega hasta acá, debe tener (**4 ptos**).
- Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente la integral $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \rho \, d\rho \, dt$
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor del flujo.

2. Determine la masa de la superficie S dada por la ecuación

$$z = 1 - x^2 - y^2, \qquad z \geq 0$$

con densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Solución. La masa de la superficie S está dada por la integral

$$\iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

Una parametrización para la superficie es

$$\vec{r}(r, t) = (r\cos(t), r\sin(t), 1 - r^2), \qquad r \in [0, 1], \quad t \in [0, 2\pi]$$

En este caso, la normal a la superficie será

$$\vec{r}_r(r, t) \times \vec{r}_t(r, t) = (2r^2\cos(t), 2r^2\sin(t), r)$$

y por tanto su norma

$$\|\vec{r}_r(r, t) \times \vec{r}_t(r, t)\| = r\sqrt{4 + r^2}$$

De este modo, la integral a calcular es

$$\iint_S \rho(x, y, z)\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr\, dt = \frac{1 + 25\sqrt{5}}{60}\pi$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por determinar una parametrización para la superficie.
- Asignar (**1 pto**) por determinar la normal a la superficie asociada a la parametrización dada.
- Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente la norma de la normal.
- Asignar (**1 pto**) por obtener la integral de masa $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r\sqrt{5}\, dr\, dt$ o una equivalente dada la parametrización obtenida. En cualquier caso, para asignar el puntaje deben estar correctos los índices de integración.
- Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente la integral $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r\, dr\, dt$ o su equivalente dada la parametrización escogida.
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de la masa.

3. Calcule el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie

$$S : x + y + z = 1, \qquad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$$

con sus normales apuntando hacia el "exterior" (tercera coordenada positiva).

Solución. La integral por calcular es

$$\iint_S F \cdot N \, dS$$

siendo N la normal unitaria a la superficie apuntando hacia el exterior. En este caso,

$$N = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

luego $F \cdot N = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}}$. Usaremos la parametrización cartesiana de la superficie

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, 1-(x+y)) \qquad y \in [0,1],\ x \in [0, 1-y]$$

De este modo, la integral de flujo queda dada por

$$\iint_S F \cdot N \, dS = \iint_S \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} \, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} \, dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \text{Área(S)}$$

Calculamos el área de la superficie (un triángulo con vértices en $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$).

$$\iint_S dS = \iint_U \|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| \, dS = \int_0^1 \int_0^{1-y} \sqrt{3} \, dx \, dy = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, el flujo sobre la superficie S será $\dfrac{1}{2}$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por determinar la normal unitaria a la superficie. También asignar el puntaje si solo se determine la normal exterior.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $F \cdot N$ o bien $F \cdot n$, siendo n una normal exterior.
- Asignar (**2 pto**) por determinar una parametrización de la superficie, incluyendo su dominio. Si solo se entrega la parametrización, asignar (**1 pto**). Es válido que el dominio quede implícito en los índices de integración de la integral.
- Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente la integral de superficie. Si el alumno sigue el camino de la pauta, asignar (**1 pto**) por calcular el área de la superficie y (**1 pto**) por concluir el flujo a través de ella.

4. Considere el siguiente campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{y(x-2)}{(1-x)}, \ln(1-x) \right).$$

Calcule $\int_C F \cdot dr$, donde C es la siguiente curva orientada en sentido antihorario:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \leq 0$$

Sugerencia: Use Teorema de Green.

Solución. Para usar el teorema de Green debemos cerrar la curva con el segmento de recta $L : x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$. De este modo, usando el teorema de Green,

$$\oint_{\Gamma \cup (-L)} F \cdot dr = \iint_U (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \iint_U 1\, dx\, dy = \frac{\pi}{2}$$

siendo U el semicírculo: $x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \leq 0$ y, $P(x,y) = \frac{y(x-2)}{(1-x)}$ y $Q(x,y) = \ln(1-x)$.

De lo anterior tendremos,

$$\int_\Gamma F \cdot dr = \frac{\pi}{2} + \int_L F \cdot dr$$

donde

$$\int_L F \cdot dr = \int_L P\, dx + Q\, dy = \int_L Q\, dy = \int_L 0\, dy = 0$$

ya que $x = 0$. Por lo tanto, $\int_C F \cdot dr = \frac{\pi}{2}$.

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por concluir que $Q_x - P_y = 1$.
- Asignar (**2 pto**) por cerrar la curva C con alguna curva de modo que la curva resultante no contenga a $x = 1$ tanto en la curva como en su interior. En caso contrario no se asignará puntaje.

  IMPORTANTE. Todo el puntaje que sigue se asignará únicamente si el alumno cerró la curva. En caso contrario no se asignará puntaje.

- Asignar (**1 pto**) por calcular $\oint_{\Gamma \cup (-L)} F \cdot dr$, para L la curva que haya elegido el alumno.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\int_L F \cdot dr$, para L la curva que haya elegido el alumno.
- Asignar (**1 pto**) por determinar el valor $\int_C F \cdot dr$ a partir de los cálculos anteriores.

5. Considere la superficie S con parametrización

$$\vec{r}(t,s) = (2(\cos(t)+3)\cos(s), 2\sin(t), 2(\cos(t)+3)\sin(s))\,,$$

para $0 \leq s \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcule el área superficial de S.

Solución. El área de la superficie está dada por

$$\iint_S dS = \iint_U \|\vec{r}_t \times \vec{r}_s\|\, dt\, ds$$

siendo U el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Calculando las derivadas parciales,

$$\vec{r}_t(t,s) = (-2\cos(s)\sin(t), 2\cos(t), -2\sin(s)\sin(t))$$
$$\vec{r}_s(t,s) = (-2(3+\cos(t))\sin(s), 0, 2\cos(s)(3+\cos(t)))$$

Luego,

$$\vec{r}_t \times \vec{r}_s = (4\cos(s)\cos(t)(3+\cos(t)), 4(3+\cos(t))\sin(t), 4\cos(t)(3+\cos(t))\sin(s))$$

De este modo,

$$\|\vec{r}_t \times \vec{r}_s\| = 4(3+\cos(t))$$

y por tanto el área de la superficie será

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 4(3+\cos(t))\, dt\, ds = 48\pi^2$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por calcular $\vec{r}_t$ correctamente.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\vec{r}_s$ correctamente.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\vec{r}_t \times \vec{r}_s$ correctamente.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\|\vec{r}_t \times \vec{r}_s\|$ correctamente.
- Asignar (**1 pto**) por escribir correctamente la integral a calcular: $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 4(3+\cos(t))\, dt\, ds$.
- Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente el área.

6. Considere el campo $F(x,y,z) = (10xy + 3z^2, 5x^2 + 4y, 6xz)$.

   (a) Demuestre que $\mathbf{rot}\, F = (0,0,0)$.

   (b) Determine una función f tal que $\nabla f = F$.

   (c) Calcule $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r}$ siendo $\Gamma : (1-t, 1+t, t^2)$, para $t \in [0,1]$.

Solución.

(a) Calculemos $\mathbf{rot}\, F$,

$$(\mathbf{rot}\, F)(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 10xy + 3z^2 & 5x^2 + 4y & 6xz \end{vmatrix} = (0-0, 6z - 6z, 10x - 10x) = (0,0,0)$$

(b) Dado que el rotor es cero y que F tiene derivadas parciales continuas, entonces existe f tal que $\nabla f = F$. En otras palabras,

$$f_x(x,y,z) = 10xy + 3z^2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,y,z) = 5x^2y + 3xz^2 + c(y,z)$$

Derivando la igualdad anterior respecto a y tendremos

$$5x^2 + 4y = f_y(x,y,z) = 5x^2 + c_y(y,z) \quad \Longrightarrow \quad c_y(y,z) = 4y \quad \Longrightarrow \quad c(y,z) = 2y^2 + k(z)$$

obteniendo así que $f(x,y,z) = 5x^2y + 3xz^2 + 2y^2 + k(z)$. Derivando esta última expresión respecto a z tendremos que

$$6xz + k'(z) = f_z(x,y,z) = 6xz$$

concluyendo así que $k(z)$ es contantes y por tanto

$$f(x,y,z) = 5x^2y + 3xz^2 + 2y^2 + C$$

con C una constante.

(c) Para calcular $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r}$ usamos el teorema fundamental para integrales de línea,

$$\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} = f(0,2,1) - f(1,1,0) = (8 + C) - (7 + C) = 1$$

Evaluación.

- Asignar (**0.5 pto**) por cada coordenada del rotor cero.
- Asignar (**1 pto**) por obtener $f(x,y,z) = 5x^2y + 3xz^2 + c(y,z)$ o equivalente de acuerdo a cuál variable comienza integrando.
- Asignar (**1 pto**) por obtener que $c(y,z) = 2y^2 + k(z)$ o o equivalente de acuerdo a cuál variable comienza integrando.
- Asignar (**1 pto**) por obtener que $f(x,y,z) = 5x^2y + 3xz^2 + 2y^2 + C$, puede suponer la constante $C = 0$.
- Asignar (**0.5 pto**) por calcular $f(0,2,1)$.
- Asignar (**0.5 pto**) por calcular $f(1,1,0)$.
- Asignar (**0.5 pto**) por calcular $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r}$.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2016

MAT1630 ⋆ Cálculo 3

Examen

1. Considere la curva Γ dada en forma paramétrica:

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$$

Determine una parametrización respecto a longitud de arco de la curva Γ.

Solución. Calculemos $s(t)$,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\dot{\vec{r}}(u)\| \, du \\ &= \int_0^t \|(e^u(\cos(u) - \sin(u)), e^u(\sin(u) + \cos(u)), e^u)\| \, du \\ &= \sqrt{3} \int_0^t e^u du \\ &= \sqrt{3}(e^t - 1) \end{aligned}$$

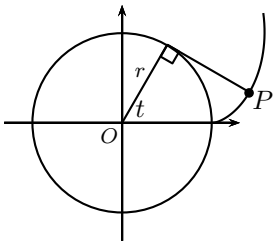
De este modo $t = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)$ y la arcoparametrización es

$$\vec{r}(s) = \left(1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos\left(\ln\left(1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), \sin\left(\ln\left(1 + \tfrac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), 1\right)$$

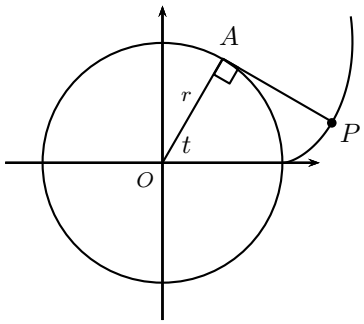
Evaluación.

- Asignar (**1.5 pto**) por calcular correctamente $\dot{\vec{r}}(u)$.
- Asignar (**1.5 pto**) por obtener que $s(t) = \sqrt{3}\int_0^t e^u du$. La integral también puede partir de cualquier otro número diferente a cero.
- Asignar (**1 pto**) por obtener que $s(t) = \sqrt{3}(e^t - 1)$. Puede haber una diferencia en la parte constante dependiendo del índice de partida para la integral.
- Asignar (**1 pto**) por obtener que $t = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)$.
- Asignar (**1 pto**) por remplazar $t = t(s)$ en la parametrización original.

2. Se enrolla una cuerda alrededor de un círculo y luego se desenrolla mientras se mantiene tensa (ver la figura). El círculo tiene radio r y centro O, y la posición inicial de P es $(r, 0)$. Determine las coordenadas del punto P como función del ángulo t de la figura.



Solución. Consideremos la figura



El segmento $\overline{AP}$ mide el perímero de la sección circular asociada al ángulo t, vale decir

$$AP = t \cdot r$$

Las coordenadas del punto P corresponden al vector $\overrightarrow{OP}$, luego

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

y por tanto las coordenadas de P están dadas por

$$(x, y) = r(\cos(t), \sin(t)) + t \cdot r(\sin(t), -\cos(t))$$

es decir,

$$x = r(\cos(t) + t\sin(t)) \qquad \text{e} \qquad y = r(\sin(t) - t\cos(t))$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar la medida del segmento $\overline{AP}$.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar la coordenada x del punto P.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar la coordenada y del punto P.

3. Calcule la curvatura de la curva cicloide $\vec{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, para todo $t \in (0, 2\pi)$.

Solución. Consideremos la curva en $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), 0)$$

Ahora calculamos la primera y segunda derivada

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1 - \cos(t), \sin(t), 0)$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\sin(t), \cos(t), 0)$$

Luego,

$$\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = (0, 0, \cos(t) - 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\| = |\cos(t) - 1|$$

Además,

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$$

Finalmente, la curvatura para todo $t \in (0, 2\pi)$ es

$$\kappa(t) = \frac{|\cos(t) - 1|}{\sqrt{2 - 2\cos(t)}} = |\cos(t/2)|$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\dot{\vec{r}}(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\ddot{\vec{r}}(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\|\dot{\vec{r}}(t)\|$.
- Asignar (**1 ptos**) por obtener que $\kappa(t) = |\cos(t/2)|$.

4. Sea $\vec{\alpha}(s)$ una curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada respecto a longitud de arco con $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ sus vectores tangente, normal y binormal, respectivamente. Si la torsión es constante, demuestre que la curva paramétrica

$$\vec{\beta}(s) = -\frac{N(s)}{\tau} + \int_0^s B(t)\,dt$$

tiene curvatura constante.

Solución. La curvatura de β está dada por:

$$k_\beta = \frac{\|\beta'(s) \times \beta''(s)\|}{\|\beta'(s)\|^3}.$$

Así, calculamos

$$\begin{aligned}
\beta'(s) =& \frac{-1}{\tau}(-kT(s) + \tau B(s)) + B(s) = \frac{k}{\tau}T(s) \\
\beta''(s) =& \left(\frac{k}{\tau}\right)' T(s) + \frac{k^2}{\tau}N(s) \\
\beta'(s) \times \beta''(s) =& \frac{k^3}{\tau^2}B(s) \\
\|\beta'(s) \times \beta''(s)\| =& \frac{k^3}{\tau^2} \\
\|\beta'(s)\|^3 =& \frac{k^3}{\tau^3}
\end{aligned}$$

Así,

$$k_\beta = \tau = cte.$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\beta'(s)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\beta''(s)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\beta'(s) \times \beta''(s)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\|\beta'(s) \times \beta''(s)\|$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\|\beta'(s)\|$.
- Asignar (**1 ptos**) por obtener que $\kappa_\beta = \tau$.

5. Determine el área de la superficie de revolución que resulta al rotar la astroide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en torno al eje X.

Solución. El área de superficie está dada por:

$$S = \int_a^b 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

La astroide está parametrizada por:

$$x(t) = \cos^3(t), \quad y(t) = \sin^3(t) \quad t \in [0, \pi/2].$$

Note que el intervalo del parámetro t representa a la curva del primer cuadrante.

Así, calculamos

$$\begin{aligned} S =& \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin^3(t)\sqrt{(-3\cos^2(t)\sin(t))^2 + (3\sin^2(t)\cos(t))^2}dt \\ =& 6\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\sqrt{\cos^4(t) - \sin^4(t) + \sin^2(t)}dt \\ =& 6\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\cos(t)dt \\ =& \frac{6\pi}{5}. \end{aligned}$$

Como al rotar en torno al eje X la curva en el intervalo $[\pi/2]$ obtengo la mitad de la superficie de revolución, entonces el área es $\dfrac{12\pi}{5}$.

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por determinar una parametrización correcta para la curva.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $x'(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $y'(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 3\sin^4(t)\cos(t)$.
- Asignar (**2 ptos**) por calcular el área de la superficie.

6. Calcular la integral de línea

$$\int_\Gamma (2xy^2 + y)dx + (2x^2y + x + x^2/2)dy$$

siendo Γ la curva $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geq 0$, recorrida en sentido antihorario.

Solución. Note que Γ es una curva abierta, por lo que para usar el Teorema de Green, debemos cerrar la curva. Sea $\tilde{\Gamma}$ la recta $y = 0$ entre los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.

Entonces, usando el Teorema de Green, obtenemos que:

$$\int_{\Gamma\cup\tilde{\Gamma}} Pdx + Qdy = \int\int_D \frac{dQ}{dx} - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{y}}dA,$$

donde

$$\begin{aligned} P =& 2xy^2 + y \\ Q =& 2x^2y + x + x^2/2 \\ \frac{dP}{dy} =& 4xy + 1 \\ \frac{dQ}{dx} =& 4xy + 1 + x. \end{aligned}$$

Así,

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int\int_D \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}dA - \int_{\tilde{\Gamma}} Pdx + Qdy.$$

Además, la región encerrada D está dada por

$$D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad y \geq 0\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \int\int_D \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}dA =& \int\int_D xdA \\ =& \int_{-a}^{a}\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} xdydx \\ =& b\int_{-a}^{a} x\sqrt{1 - x^2/a^2}dx \\ =& 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $\tilde{\Gamma}$ puede ser parametrizada por

$$r(t) = (at, 0), \quad t \in [-1, 1],$$

entonces

$$\int_{\tilde{\Gamma}} Pdx + Qdy = \int_{\tilde{\Gamma}} Pdx = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_\Gamma (2xy^2 + y)dx + (2x^2y + x + x^2/2)dy = 0.$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por concluir que $Q_x - P_y = x$.

- Asignar (**2 pto**) por cerrar la curva Γ. En caso contrario no se asignará puntaje.

  IMPORTANTE. Todo el puntaje que sigue se asignará únicamente si el alumno cerró la curva. En caso contrario no se asignará puntaje.

- Asignar (**1 pto**) por calcular $\oint_{\Gamma \cup \Gamma'} F \cdot dr$, para $\tilde{\Gamma}$ la curva que haya elegido el alumno. Puede hacerlo directa o por Green
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\int_{\tilde{\Gamma}} F \cdot dr$, para $\tilde{\Gamma}$ la curva que haya elegido el alumno.
- Asignar (**1 pto**) por determinar el valor $\int_{\Gamma} F \cdot dr$ a partir de los cálculos anteriores.

7. Calcule, usando el teorema de Stokes, el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y,z) = (2x+y-z, 2x+z, 2x-y-z)$ al mover una partícula a lo largo de la curva Γ dada por

$$\Gamma : \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

donde la orientación de Γ se escoge de modo que la curva que se obtiene al proyectar Γ sobre el plano $z = 0$ esta orientada positivamente.

Solución.

Alternativa 1. Por el teorema de Stokes

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot dr = \int\int_S \text{rot}(\vec{F}) dS,$$

donde S es cualquier superficie con frontera Γ y la orientacin de S se escoge segn la orientacin la curva Γ. Dos alternativas para S son $S_1 : 2x - z = 0$, $2x^2 + y^2 \leq 1$ y $S_2 : 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$, $2x^2 + y^2 \leq 1$, pero los cálculos se facilitan si escogemos $S_1 : 2x - z = 0$, $2x^2 + y^2 \leq 1$. Notar que S_1 se puede parametrizar como

$$\varphi(u,v) = (u, v, 2u), \quad 2u^2 + v^2 \leq 1$$

donde, según la orientación de Γ, el vector normal de S es $\vec{N} = (-2, 1, 0)$. Así

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \vec{F} \cdot dr &= \int\int_S rot(\vec{F}) dS \\ &= \int\int_{2u^2+v^2\leq 1} rot(\vec{F})(\varphi(u,v)) \cdot \vec{N} d(u,v) \\ &= \int\int_{2u^2+v^2\leq 1} (-2,-3,1) \cdot (-2,0,1) dS \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr d\theta = \frac{5\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Alternativa 2. Otra alternativa equivalente es considerar la parametrizaciń

$$\psi(r,\theta) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \cos\theta, r\sin\theta, \frac{2r}{\sqrt{2}} \cos\theta \right), \quad r \in [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

de S_1 con vector normal $\vec{n} = (-2r/\sqrt{2}, 0, r/\sqrt{2})$.

Evaluación.

- Asignar (**1.5 pto**) por calcular el rotor de F.
- Asignar (**1.5 pto**) por alguna parametrización de la superficie dada para el Teorema de Stokes.
- Asignar (**1 pto**) por calcular la normal o normal unitaria a la superficie.
- Asignar (**1 pto**) por cambio de variable que permita calcular la integral.
- Asignar (**1 pto**) por calcular la integral y concluir el resultado pedido.

8. Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq a\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = a\}$ la superficie orientada según los vectores normales apuntando hacia el exterior. Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_S F \cdot N \, dS = 10\pi$$

donde $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ y N la normal unitaria a la superficie apuntando hacia afuera.

Solución. Sea $S_1 = S \cup S_2$, donde $S_2 = \{(x,y,z) \, : \, x^2 + y^2 \leq 4, \, z = 0\}$. Luego

$$10\pi = \int_S \vec{F} \cdot dS = \int_{S_1} \vec{F} \cdot dS - \int_{S_2} \vec{F} \cdot dS. \tag{1}$$

Sea A la región interior a S_1, por el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \vec{F} \cdot dS = \int\int\int_A div(\vec{F}) dV &= \int\int\int_A 2(x+y+z) dV \\
&= \int\int_{x^2+y^2 \leq 4} \left(\int_0^a 2(x+y+z) dz \right) d(x,y) \\
&= \int\int_{x^2+y^2 \leq 4} 2a(x+y) d(x,y) + 4\pi a^2 \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 (\cos\theta + \sin\theta) dr d\theta + 4\pi a^2 = 4\pi a^2
\end{aligned}$$

Por otra parte, la superficie S_2 se parametriza como $\varphi(u,v) = (u,v,0)$, $(u,v) \in \{u^2 + v^2 \leq 4\}$ con vector normal $\vec{N} = (0,0,-1)$. Así

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot dS = \int\int_{u^2+v^2 \leq 4} (u^2, v^2, 0) \cdot (0,0,-1) dA = 0.$$

Finalmente, de (1) obtenemos que $10\pi = 4a^2\pi$, es decir $a = \sqrt{10}/2$.

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por tapar la superficie.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\nabla \cdot F$
- Asignar (**0.5 pto**) por hacer cambio de variable para calcular la integral de volumen.
- Asignar (**1 pto**) por calcular la integral de volumen.
- Asignar (**0.5 pto**) por cambio de variable que permita calcular la integral de superficie.
- Asignar (**1 pto**) por calcular la integral de superficie.
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de a.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

TIEMPO: 150 MINUTOS

SIN CONSULTAS

SIN CALCULADORA

PROHIBIDO TENER CELULAR SOBRE LA MESA

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
5 de Septiembre del 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Solución Interrogación 1

1. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida por la intersección de dos superficies.

$$\Gamma : \begin{cases} y^2 + z^2 = 2z \\ y^2 + 4x = 0 \end{cases}$$

Determine una parametrización para Γ (se le está pidiendo que encuentre **una** función r y **un** intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $r : I \to \mathbb{R}^3$ describa la curva completa).

Solución. Podemos notar que

$$y^2 + z^2 = 2z \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 + (z-1)^2 = 1$$

ecuación de un cilindro. Luego, una parametrización de las coordenadas y y z de Γ son $y = \cos(t)$ y $z = 1 + \text{sen}(t)$, para $t \in [0, 2\pi]$. La coordenada $x = x(t)$ se obtiene de la ecuación $y^2 + 4x = 0$, vale decir $x(t) = -\dfrac{\cos^2(t)}{4}$. Por lo tanto, una parametrización para Γ es

$$\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{\cos^2(t)}{4}, \cos(t), 1 + \text{sen}(t) \right), t \in [0, 2\pi].$$

2. Encuentre la parametrización en longitud de arco de la curva dado por

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} 3t \\ 3 \\ 1+t^2 \end{bmatrix}, \qquad t \geq 0.$$

Solución Tenemos

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{3(1+t^2)-6t^2}{(1+t^2)^2} \\ \frac{-6t}{(1+t^2)^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{bmatrix} 3-3t^2 \\ -6t \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{\frac{(3-3t^2)^2}{(1+t^2)^4} + \frac{36t^2}{(1+t^2)^4}} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \sqrt{9 - 18t^2 + 9t^4 + 36t^2} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \sqrt{9(1+t^2)^2} \\ &= \frac{3(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{3}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Luego, el longitud del arco esta dado por

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|du = \int_0^t \frac{3}{1+u^2}du = 3\tan^{-1}(t)$$

y tenemos

$$t = \tan(s/3).$$

Entonces,

$$\mathbf{r}(s) = \frac{1}{1+\tan^2(s/3)} \begin{bmatrix} 3\tan(s/3) \\ 3 \\ 1+\tan^2(s/3) \end{bmatrix}$$

que se pueda simplificar a

$$\mathbf{r}(s) = \begin{bmatrix} 3\,\mathrm{sen}(s/3)\cos(s/3) \\ 3\cos^2(s/3) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Determine la ecuación del plano osculador y la torsión para la curva

$$\alpha(t) = \left(\arctan(t), -\frac{1}{1+t}, \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right), t > -1,$$

en el punto donde el vector tangente a la curva tiene la dirección de la recta

$$L: \qquad x+1 = y-1 = z-2\,.$$

Solución: El vector paralelo a la recta L es $v = (1,1,1)$. Entonces, la curva α tiene vector tangente en la dirección de la recta L si $\alpha'(t)$ es paralelo a v si y solo si $\alpha'(t) \times v = 0$. Tenemos que

$$0 = \alpha'(t)\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{1+t^2} & \frac{1}{(1+t)^2} & \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, -\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)$$

de donde resulta $t = 0$. Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha(0) &= (0,-1,0) \\
\alpha'(0) &= (1,1,1) \\
\alpha''(t) &= \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, -\frac{2}{(1+t)^3}, -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\right) \Longrightarrow \alpha''(0) = (0,-2,0) \\
\alpha'''(t) &= \left(\frac{-2+6t^2}{(1+t^2)^3}, \frac{6}{(1+t)^4}, \frac{2t^2-1}{(1+t^2)^{5/2}}\right) \Longrightarrow \alpha'''(0) = (-2,6,-1) \\
\alpha'(0)\times\alpha''(0) &= (2,0,-2)
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación del plano osculador de la curva $\alpha(t)$ en el punto $\alpha(0) = (0,-1,0)$ es

$$[(x,y,z) - (0,-1,0)] \cdot (2,0,-2) = 0 \Longleftrightarrow x - z = 0$$

La torsión de la curva $\alpha(t)$ en el punto $\alpha(0) = (0,-1,0)$ es

$$\tau(0) = \frac{(\alpha'(0)\times\alpha''(0))\cdot\alpha'''(0)}{\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|^2} = -\frac{1}{4}\,.$$

4. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco con vector tangente unitario $T(s)$. Definimos la curva

$$\beta(t) = \int_a^t T(s) \times T'(s)\, ds\,.$$

Calcule la curvatura y torsión de β.

Solución: Sean $\{T, B.N\}$ el tiedro de Frenet de la curva α. Entonces, usando las ecuaciones de Frenet-Serret vemos que

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= T \times T' = T \times (\kappa N) = \kappa(T \times N) = \kappa B \\ \beta''(t) &= \kappa' B + \kappa B' = \kappa' B + \kappa(-\tau N) = \kappa' B - \kappa\tau N \end{aligned}$$

Se sigue que $\|\beta'(t)\| = \kappa\|B\| = \kappa$ y

$$\beta'(t) \times \beta''(t) = -\kappa^2\tau(B \times N) = \kappa^2\tau T \Longrightarrow \|\beta'(t) \times \beta''(t)\| = \kappa^2|\tau|\|T\| = \kappa^2|\tau|\,.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \beta'''(t) &= \kappa'' B + \kappa'(-\tau N) - (\kappa\tau)' N - \kappa\tau(-\kappa T + \tau B) \\ &= \kappa^2\tau T - (\kappa'\tau + (\kappa\tau)')N + (\kappa'' - \kappa\tau^2)B \end{aligned}$$

Entonces, $(\beta'(t) \times \beta''(t)) \cdot \beta'''(t) = (\kappa^2\tau)^2(T \cdot T) = (\kappa^2\tau)^2$. Por lo tanto, la curvavatura κ_β y la torsión τ_β de la curva β son:

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(t) &= \frac{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{\kappa^2|\tau|}{\kappa^3} = \frac{|\tau|}{\kappa} \\ \tau_\beta(t) &= \frac{(\beta'(t) \times \beta''(t)) \cdot \beta'''(t)}{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\|^2} = \frac{(\kappa^2\tau)^2}{(\kappa^2|\tau|)^2} = 1\,. \end{aligned}$$

5. Considere la curva en $\mathbb{R}^2$ determinada por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$,

   a) Exprésela en coordenadas polares y grafíquela.

   b) Demuestre que su longitud total es $4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec(2\theta)}\, d\theta$.

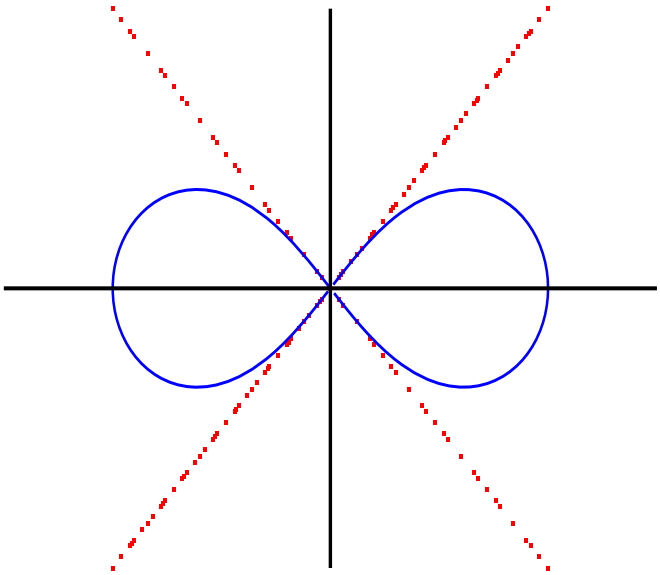
   c) Encuentre el área de la superficie encerrada por uno de sus bucles.

Solución

a) Expresando la curva en coordenadas polares

$x = \cos\theta,\ \ y = \operatorname{sen}\theta$ nos queda la ecuación $r^2 = \cos 2\theta$

Vemos así que los intervalos $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ están fuera de su dominio.



b) Por simetría su longitud L es $4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$

Tenemos que $r^2 = \cos(2\theta)$ por lo tanto $r'^2 = \dfrac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos(2\theta) + \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}}\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(2\theta) d\theta$$

c) Por simetría el área encerrada por uno de sus bucles es

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
6 de Octubre del 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Solución Interrogación 2

1. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva que sigue de la intersección del cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ y el plano $4y + 3z = 1$. Calcular la masa de la curva Γ si la densidad en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ gramos por unidad de longitud de alambre.

   Solución. Una parametrización para la curva Γ es $r(t) = (5\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t), 1/3 - 4\,\mathrm{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$. Luego, la masa del alambre es

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \rho\, ds &= \int_0^{2\pi} \rho(r(t))\, \|r'(t)\|\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (25\cos^2(t) + 9\,\mathrm{sen}^2(t)) \sqrt{25\,\mathrm{sen}^2(t) + 9\cos^2(t) + 16\cos^2(t)}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (9 + 16\cos^2(t)) \cdot 5\, dt \\
&= 90\pi + 80 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, dt \\
&= 90\pi + 80\pi = 170\pi
\end{aligned}$$

2. Considere el campo de fuerzas $F(x, y, z) = (x - y, y + z, z - x)$. Calcule la integral de trabajo

$$\int_\Gamma F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

   siendo Γ la curva de segmentos de recta que une los puntos $(0, 0, 0) \to (1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \to (1, 1, 1)$.

   Solución. Usamos las propiedades de la integral de línea, separando el trabajo en cada segmento que compone la curva:

$$\int_\Gamma F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_1} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_3} F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

   siendo Γ_1 el segmento que une los punto $(0, 0, 0)$ con $(1, 0, 0)$, Γ_2 el segmento que une los punto $(1, 0, 0)$ con $(1, 1, 0)$, y Γ_3 el segmento que une los punto $(1, 1, 0)$ con $(1, 1, 1)$. Usando las parametrización de los diferentes segmentos tendremos

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^1 (t, 0, -t) \cdot (1, 0, 0)\, dt + \int_0^1 (1 - t, t, -1) \cdot (0, 1, 0)\, dt + \int_0^1 (1 - 1, 1 + t, t - 1) \cdot (0, 0, 1)\, d \\
&= \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 (t - 1)\, dt \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. Considere el campo de vectores

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + xe^{-y^2}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2ye^{-y^2}\right)\hat{\jmath}.$$

Se define $f(x,y) = \int_C F \cdot dr$ donde C es cualquier curva simple (no cerrada) que va desde $(0,0)$ hasta cualquier punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

a) Calcule $f(x,y)$. (4 puntos)

b) Verifique que $\nabla f = F$. (2 puntos)

Solución:

a) Notemos que el campo vectorial $F = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}$ satisface

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial P}{\partial y} & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + xe^{-y^2}\right) = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 2xye^{-y^2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2ye^{-y^2}\right) = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 2xye^{-y^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Luego, F es un campo conservativo en cualquier dominio simplemente conexo del plano que no contenga al origen. Entonces, la integral de línea que define a la función f es independiente de la trayectoria. Basta calcular la integral de línea a lo largo de un segmento de recta que una los puntos $(0,0)$ y (x,y):

$$C: \qquad \alpha(t) = (1-t)(0,0) + t(x,y) = (tx, ty)\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_C P\,dx + Q\,dy \\ &= \int_0^1 \left[\left(\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}} + txe^{-t^2y^2}\right)x + \left(\frac{ty}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}} - (tx)^2(ty)e^{-t^2y^2}\right)y\right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + tx^2e^{-t^2y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - t^3x^2y^2e^{-t^2y^2}\right] dt \\ &= \sqrt{x^2+y^2} + x^2\int_0^1 te^{-t^2y^2}\,dt - x^2y^2\int_0^1 t^3e^{-t^2y^2}\,dt \\ &= \sqrt{x^2+y^2} + x^2\left[\frac{1}{2y^2} - \frac{e^{-y^2}}{2y^2}\right] - x^2y^2\left[\frac{1}{2y^4} - \frac{(y^2+1)e^{-y^2}}{2y^4}\right] \\ &= \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2e^{-y^2}}{2}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{x^2e^{-y^2}}{2}$

b) Se tiene que

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + xe^{-y^2}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2ye^{-y^2}\right) = F(x,y).$$

4. Calcule el área en el plano encerrada por la curva: $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \operatorname{sen}(2t)$ para $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Solución Esta curva está simple cerrada, suave por tramos con orientación positiva, entonces podemos usar el teorema de Green

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

para funciones P y Q tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Versión 1 Para $P = 0$ y $Q = x$, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D 1dA = \int_C xdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t)y'(t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)2\cos(2t)dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(t)\left(1 - 2\,\mathrm{sen}^2(t)\right)dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos(t) - 2\cos(t)\,\mathrm{sen}^2(t)\right)dt \\ &= 2\left[\mathrm{sen}(t) - \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}^3(t)\right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} = 2\left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Versión 2 Para $P = -y$ y $Q = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D 1dA = \int_C (-y)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-y(t))x'(t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\mathrm{sen}(2t))(-\mathrm{sen}(t))dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t))\,\mathrm{sen}(t)dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\,\mathrm{sen}^2(t)dt \\ &= 2\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^3(t)\right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Versión 3 Otras opciones, tales como $P = -\frac{1}{2}y$ y $Q = \frac{1}{2}x$, dan el mismo resultado.

5. Sea $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\overrightarrow{F}(x,\ y) = (e^{xy}(1 + xy),\ x^2 + e^{y^2} + x^2e^{xy})$.
Encontrar $\int_\lambda \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda}$ si λ recorre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$ en sentido antihorario.

Solución

Sea $D = \{(x,\ y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ entonces $\lambda + \mu$ recorre positivamente la frontera de D siendo μ el trazo desde (-1, 0) hasta (1, 0).

$\overrightarrow{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^2$, por Green se tiene que

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + e^{y^2} + x^2e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}e^{xy}(1 + xy)\right)\ dA = \int_{\lambda+\mu} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+e^{y^2}+x^2e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}e^{xy}(1+xy) = 2x+2xe^{xy}+x^2ye^{xy} - ye^{xy}(1+xy) - xe^{xy} = 2x$$

Por lo tanto $\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + e^{y^2} + x^2e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}e^{xy}(1 + xy)\right)\ dA = \iint_D 2x\,dA = 0.$

Parametrizamos $\mu(t) = (t, 0)$, con $-1 \leq t \leq 1$ tenemos que

$$\int_\mu \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\mu} = \int_{-1}^{1} (1, 1 + 2t^2) \cdot (1, 0)\ dt = 2$$

Por lo tanto, $\int_\lambda \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda} = -2$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
7 de Noviembre del 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Solución Interrogación 3

1. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas. Si S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, demuestre que

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = 0$$

siendo $\mathbf{N}$ la normal unitaria a S apuntando hacia afuera.

Solución. Sean $S_- : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con $z \leq 0$ y $S_+ : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con $z \geq 0$. Luego,

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_{S_-} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{S^+} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

Por el teorema de Stokes se tendrá que

$$\iint_{S_-} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = -\int_\Omega \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$
$$\iint_{S_+} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_\Omega \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

siendo Ω la circunferencia $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. Por lo tanto, $\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = 0$.

2. La superficie S está dada por la parte positiva de la función $f(t) = \sqrt{-t^2 + 3t - 2}$ girando alrededor del eje y.

   a) Determine las ecuaciones paramétricas de S.

   b) Calcule el área de S.

Solución

a) Una superficie de revolución se puede parametrizar como

$$x = f(t)\cos\theta, \qquad y = t, \qquad z = f(t)\,\text{sen}\,\theta.$$

La función $f(t)$ es positiva para $1 \leq t \leq 2$, entonces el dominio es $1 \leq t \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

b) El área está dada por

$$\begin{aligned}
A(S) &= 2\pi \int_1^2 f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}dt \\
&= 2\pi \int_1^2 \sqrt{-t^2+3t-2}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\frac{-2t+3}{\sqrt{-t^2+3t-2}}\right)^2}dt \\
&= 2\pi \int_1^2 \sqrt{-t^2+3t-2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{4t^2-12t+9}{-t^2+3t-2}}dt \\
&= 2\pi \int_1^2 \sqrt{-t^2+3t-2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(-t^2+3t-2)+(4t^2-12t+9)}{-t^2+3t-2}}dt \\
&= \pi \int_1^2 \sqrt{-t^2+3t-2}\sqrt{\frac{1}{-t^2+3t-2}}dt \\
&= \pi \int_1^2 1dt = \pi
\end{aligned}$$

3. La superficie S es la parte del cono $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ que se encuentra por arriba de la esfera de radio 2 y por debajo del plano $z = 2$. Calcule la masa total de la superficie S si su densidad de masa está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$.

Solución La intersección del cono y la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ es una circunferencia en el plano $z = \sqrt{3}$. Entonces, una parametrización de S es $\mathbf{r}(r, \theta) = (x, y, z)$ con

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = \sqrt{3}r$$

para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $1 \leq r \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. La masa de S está dado por

$$m(S) = \iint_S \rho(x, y, z)dS = \iint_D \rho(\mathbf{r}(r, \theta))|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|dA.$$

Tenemos

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & \sqrt{3} \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{array} \right\| = \sqrt{4r^2} = 2r$$

entonces

$$\begin{aligned}
m(S) &= \iint_S \rho(x,y,z)\, dS \\
&= \iint_D (r\cos(\theta))^2\, 2r\, dA \\
&= 2\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} r^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta dr \\
&= 2\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} r^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta)) d\theta dr \\
&= \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} r^3 \left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta))\right]_0^{2\pi} dr \\
&= \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} r^3 2\pi dr \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{7}{18}\pi
\end{aligned}$$

4. Calcular el flujo de salida del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (2y, zy, 3z)$ a través de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ acotada en el primer octante por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 5$.

Solución: Una parametrización para la superficie cilíndrica es $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{\phi}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z)$$

donde $\Omega = \{(\theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\,,\ 0 \leqslant z \leqslant 5\}$. Los vectores tangentes a la superficie son

$$\begin{aligned}
\vec{\phi}_\theta(\theta, z) &= (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0) \\
\vec{\phi}_z(\theta, z) &= (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

El vector normal a la superficie es:

$$\vec{\phi}_\theta \times \vec{\phi}_z = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0)\,.$$

Entonces, el flujo de F a través de esta superficie es:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_\Omega \vec{F}(\vec{\phi}(\theta,z))\cdot(\vec{\phi}_\theta\times\vec{\phi}_z)dA \\
&= \iint_\Omega (4\operatorname{sen}\theta, 2z\operatorname{sen}\theta, 3z)\cdot(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0)d\theta dz \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^5 4(\operatorname{sen}(2\theta)+z\operatorname{sen}^2\theta)dzd\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\left(5\operatorname{sen}(2\theta)+\frac{25}{2}\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)\right)d\theta \\
&= 20\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2}+50\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&= 20+\frac{25}{2}\pi\,.
\end{aligned}$$

5. Calcular $\iint_S \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}$ siendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2+z^2}, zx, x^2e^{z^2y})$ y S la porción del elipsoide $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{12}=1$ fuera del cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de modo que las normales apuntan hacia afuera del elipsoide.

Solución:

En el elipsoide si $x^2+y^2=1, z^2=9$, por lo tanto S es la porción del elipsoide entre los planos $z=-3$ y $z=3$. La frontera de S orientada positiva es $\lambda_1+\lambda_2$, con $\lambda_1(t)=(\cos(t),-\operatorname{sen}(t),3),\ t\in[0,\ 2\pi]$ y $\lambda_2(t)=(\cos(t),\operatorname{sen}(t),-3),\ t\in[0,\ 2\pi]$. Por el Teorema de Stokes,

$$\iint_S \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \int_{\lambda_1}\overrightarrow{F}\cdot d\vec{\lambda}+\int_{\lambda_2}\overrightarrow{F}\cdot d\vec{\lambda}$$

Por lo tanto

$$\iint_S \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \int_0^{2\pi}(\sqrt{10}, 3\cos(t), \cos^2(t)e^{-9\operatorname{sen}(t)})\cdot(-\operatorname{sen}(t), -\cos(t), 0)dt$$

$$+\int_0^{2\pi}(\sqrt{10}, 3\cos(t), \cos^2(t)e^{9\operatorname{sen}(t)})\cdot(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)dt = -2\int_0^{2\pi}\sqrt{10}\operatorname{sen}(t)\,dt = 0$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
28 de Noviembre del 2017

MAT1630 $\star$ Cálculo III
Examen

1. Determine el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x,y) = x\mathbf{i}+(y+2)\mathbf{j}$ al mover un objeto a lo largo de un arco de la cicloide $r(t) = (t - \text{sen}(t))\mathbf{i} + (1 - \cos(t))\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

   Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= \int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (t - \text{sen}(t), 3 - \cos(t)) \cdot (1 - \cos(t), \text{sen}(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t - t\cos(t) - \text{sen}(t) + \text{sen}(t)\cos(t) + 3\,\text{sen}(t) - \text{sen}(t)\cos(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t - t\cos(t) + 2\,\text{sen}(t))\, dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 - (t\,\text{sen}(t) + \cos(t)) - 2\cos(t)\right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi^2\,. \end{aligned}$$

2. La semicircunferencia $(y-3)^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, en el plano YZ gira en torno al eje Z. Parametrice la superficie formada y encuentre la coordenada z de su centroide (observación: centroide significa centro de masa para densidad de masa 1).

   Solución:
   Consideramos los parámetros u y v como en el dibujo.
   Entonces $x(u,v) = (3+cos(u))sen(v)$; $\quad y(u,v) = (3+cos(u))cos(v)$; $\quad z = sen(u)$, $u \in [0,\pi],\ v \in [0,2\pi]$
   Si $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, la superficie generada es D y su área es A, entonces

$$A = \iint_D dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} ||f_u \times f_v||\, du\, dv$$

   $f_u+f_v = ((3+cos(u))sen(v)cos(u))\widehat{i}+(-(3+cos(u))cos(v)cos(u))\widehat{j}+((3+cos(u))sen(u)sen^2(v)+(3+cos(u))sen(u)cos^2(v))\widehat{k}$
   Por lo tanto

$$||f_u \times f_v|| = \sqrt{(3+cos(u))^2cos^2(u) + (3+cos(u))^2sen^2(u)} = (3+cos(u))$$

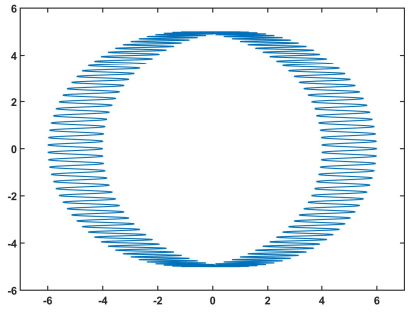
   $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(3+cos(u))du\, dv = 6\pi^2$

$$\overline{z} = \frac{1}{A}\iint_D z dS = \frac{1}{A}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen(u)(3+cos(u))du\, dv = \frac{12\pi}{6\pi^2} = \frac{2}{\pi}$$

3. Considere el campo

$$\vec{F}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{si } (x,y) = 0, \end{cases}$$

y la curva λ parametrizada por $\lambda(t) = (5\cos(t) + \cos(100t), 5\,\text{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$, graficada abajo. Calcule $\int_\lambda \vec{F} \cdot d\vec{\lambda}$.



Solución:
Sea D la región limitada por λ y C la circunferncia con centro en el origen y radio 1. Entonces en D se satisfacen las hipotesis del teorema de Green para $\overrightarrow{F}$
Se tiene entonces que

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) dx\, dy = \int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda}$$

Una parametrización positiva de la frontera de D es $\lambda+\mu$ con $\mu(t) = (cos(t), -sen(t))$

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) dx\, dy = 0 = \int_\lambda \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda} + \int_\mu \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\mu}$$

Por lo tanto

$$\int_\lambda \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda} = \int_{-\mu} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\mu} = \int_0^{2\pi} (-sen(t), cos(t) \cdot (-sen(t), cos(t))\, dt = 2\pi$$

4. Utilice el teorema de Stokes para evaluar

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

donde $\mathbf{F}(x,y,z) = 2y\cos(z)\mathbf{i} + e^x\,\text{sen}(z)\mathbf{j} + xe^y\mathbf{k}$ y S es la semiesfera $x^2+y^2+z^2 = 9, z \geq 0$ orientada hacia abajo.

Solución La frontera C es la circunferencia con parametrización

$$(3\cos(\theta), -3\,\text{sen}(\theta), 0)$$

para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Utilizando Stokes, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-6\,\text{sen}(\theta)\mathbf{i} + 3\cos(\theta)e^{-3\,\text{sen}(\theta)}\mathbf{k}\right) \cdot (-3\,\text{sen}(\theta)\mathbf{i} - 3\cos(\theta)\mathbf{j})\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 18\,\text{sen}^2(\theta)\, d\theta \\ &= 18\pi. \end{aligned}$$

5. Sea S el elipsoide de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. Calcule

$$\iint_S \left(\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+(x,y,z)\right)\cdot \mathbf{N}\,dS$$

siendo $\mathbf{N}$ la normal unitaria a S apuntando hacia afuera.

Solución. Sea S_1 la esfera de radio $\varepsilon>0$ con $\varepsilon<|a|,|b|,|c|$. Luego,

$$\begin{aligned}\iint_S \left(\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+(x,y,z)\right)\cdot \mathbf{N}\,dS &= \iint_S \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot \mathbf{N}\,dS+\iint_S (x,y,z)\cdot \mathbf{N}\,dS\\ &= \iint_{S_1} \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot \mathbf{N}\,dS+3\iiint_V dV\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia del teorema de la divergencia, con V el volumen del sólido dado por la inecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$.
Haciendo el cambio de variable $x=au$, $y=bv$, $z=cw$ tendremos que

$$\iiint_V dV = abc\iiint_{V_2} dV=\frac{4\pi}{3}abc$$

siendo V_2 la esfera de radio 1. Finalmente,

$$\iint_{S_1} \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot \mathbf{N}\,dS=\iint_{S_1}\frac{1}{\varepsilon^2}\,dS=4\pi$$

Por lo tanto, la integral pedida vale $4\pi(1+abc/3)$.

Tiempo: 120 minutos.

MAT–1630 - CALCULO III
INTERROGACIÓN 1 - Resolución

1. Considere la curva γ parametrizada por $\alpha(t) = (e^{-t}, e^{-t}, t\sqrt{2})$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule el plano osculador de γ en $(1, 1, 0)$.

   (b) Calcule la curvatura y torsión de la curva en $(1, 1, 0)$.

Solución. (a)
Notemos que $\alpha(0) = (1, 1, 0)$.

El plano osculador a la curva en $(1, 1, 0)$ tiene ecuación

$$((x, y, z) - \alpha(0)) \cdot \vec{b}(0) = 0 \quad \boxed{\text{Explicita ecuación plano (1 pto)}}$$

donde $\vec{b}(t)$ es el vector binormal que se calcula como: $\vec{b}(t) = \alpha'(t) \times \alpha''(t)$.

$\boxed{\text{Describe } b(t), \text{ binormal(0,5 pto)}}$

Calculando,

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \sqrt{2}e^{-t}\,(-1, 1, 0) \Rightarrow \vec{b}(0) = \sqrt{2}\,(-1, 1, 0) \quad \boxed{\text{Calcula binormal (1 pto)}}$$

Por lo tanto la ecuación del plano osculador es

$$\sqrt{2}\,(x-1, y-1, z) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\,(y-x) = 0 \quad \boxed{\text{Escribe ecuación plano osculador(0,5 pto)}}$$

Solución. (b)
Primero, $\alpha' \times \alpha'' = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^{-t}, 0)$ $\boxed{\text{Calcula producto cruz(0,5 pto)}}$

y luego

$$\|\alpha'(t)\|^2 = 2e^{-2t} + 2\,, \quad \|\alpha' \times \alpha''\|^2 = 4e^{-2t}\,. \quad \boxed{\text{Calcula los factores (0,5 pto)}}$$

Aplicando la fórmula,

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{2e^{-t}}{(2e^{-2t} + 2)^{3/2}} \Rightarrow \kappa(0) = \frac{1}{4} \quad \boxed{\text{Calcula la curvatura (0,5 pto)}}$$

Similarmente para la torsión de la curva en $\alpha(t)$ se necesita $\alpha'''(t) = (-e^{-t}, -e^{-t}, 0)$,

$\boxed{\text{Calcula } \alpha''' \text{ (0,5 pto)}}$

Además, $\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = \sqrt{2}e^{-2t} - \sqrt{2}e^{-2t} = 0$, luego

$$\tau(t) = -\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = 0 \Rightarrow \tau(0) = 0\,. \quad \boxed{\text{Calcula } \tau \text{ (1 pto)}}$$

Se evita este cálculo si se observa que el plano osculador es el mismo (independiente de t), luego la curva es plana, por lo tanto su torsión es cero.

2. Considere la curva γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (e^t, \text{sen}(e^t), \cos(e^t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine una parametrización por longitud de arco $\vec{x}(s)$ tal que $\vec{x}(0) = \vec{r}(0)$.

Solución.

Consideremos la parametrización $r(t)$ de la curva γ

$$\vec{r}(t) = (e^t, \text{sen}(e^t), \cos(e^t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

La parametrización $\vec{r}(t)$ tiene derivada

$$\dot{\vec{r}}(t) = e^t(1, \cos(e^t), -\text{sen}(e^t)) \qquad \boxed{\text{Calcula } \dot{\vec{r}} \text{ ((1 pto)}}$$

$$\Longrightarrow \qquad \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{2}\, e^t \qquad \boxed{\text{Calcula } \|\dot{\vec{r}}(t)\| \text{ (1 pto)}}$$

Si $\vec{x}(s)$ es una parametrización por longitud de arco tal que $\vec{x}(0) = \vec{r}(0)$, entonces $s(0) = 0$ obteniendo así

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{r}}(u)\|\, du = \sqrt{2}(e^t - 1) \qquad \boxed{\text{Explicita } s(t) \text{ (2 ptos)}}$$

$$\Longrightarrow \qquad t = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \qquad \boxed{\text{Calcula t(s) (1 pto)}}$$

Por lo tanto

$$\vec{x}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1, \text{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)$$

$$\boxed{\text{Explicita arcoparametrización (1 pto)}}$$

3. Considere C una curva en $\mathbb{R}^3$ contenida en el plano $z = \sqrt{3}\,x$ con $r(s)$ una parametrización por longitud de arco con vector normal $N(s)$ dada por

$$N(s) = (-\frac{1}{2}\cos(s), -\sin(s), -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(s))\,.$$

Pruebe que C está contenida en un círculo de radio 1.

Solución. 1

Como la curva C está contenida en un plano su torsión es cero, $\tau(s) = 0$ para todo s, y luego la binormal unitaria es la normal unitaria del plano $z = \sqrt{3}\,x$, es decir, $B = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}, 0, -1)$. Calcula la binormal unitaria (**1 pto**)

Aplicando las ecuaciones de Frenet-Serret:

$$T = (N \times B) = \pm(-\frac{1}{2}\sin(s), \cos(s), -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(s)) \quad \text{Calcula } T \text{ (**1.5 ptos**)}$$

Como $r(s)$ es la parametrización por longitud de arco, la curvatura de γ en $r(s)$ está dada por $\kappa(s) = \|\frac{d}{ds}T(s)\|$. Calcula T' (**0.5 pto**)

Calculando, $\frac{dT}{ds} = \pm(-\frac{1}{2}\cos(s), -\sin(s), -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(s))$ Calcula T (**1.5 ptos**) tiene longitud 1 por lo que $\kappa(s) = 1$ para todo s. Calcula κ (**0.5 pto**)

Como C es una curva plana con curvatura constante igual a 1, C debe ser estar contenida en un círculo de radio 1. Deduce contenida en círculo (**1 pto**)

Solución. 2 Como la curva C está contenida en un plano su torsión es cero, $\tau(s) = 0$ para todo s. Argumenta $\tau(s) = 0$ (**1.0 ptos**)

Por hipótesis $N(s)$ es normal y además es un vector de norma 1,

$$\|N(s)\|^2 = (\frac{1}{4}\cos^2(s) + \sin^2(s) + \frac{3}{4}\cos^2(s) = \cos^2(s) + \sin^2(s) = 1 \quad \text{Comprueba } \|N(s)\| = 1 \text{ (**1.0 ptos**)}$$

por lo tanto $N(s)$ es la normal unitaria.

Además sabemos que para para todo s : $\frac{dN}{ds}(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$ donde $T(s)$ es la tangente unitaria en $r(s)$ y $B(s)$ es la binormal unitaria en $r(s)$. Plantea igualdad (**1.0 ptos**)

$\tau(s) = 0 \Rightarrow |\kappa(s)|\,\|T(s)\| = \|\frac{dN}{ds}(s)\|$. Luego, $\kappa(s) = \|\frac{dN}{ds}(s)\|$, pues $T(s)$ es la tangente unitaria en $r(s)$ para todo s. Explicita $\kappa(s)$ (**1.0 ptos**)

Calculando, para todo s:

$$\left\|\frac{dN}{ds}(s)\right\| = \|(\frac{1}{2}\sin(s), -\cos(s), \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}(s))\| = 1 \quad \text{Calcula } \|dN/ds\| \text{ (**1.0 ptos**)}$$

Lo cual prueba que la curvatura es constante igual a 1. Luego, la curva planar está contenida en un círculo de radio 1. Concluye (**1.0 ptos**)

4. Sea γ un curva suave cerrada que no pasa por p. Pruebe que en los puntos q en γ donde la distancia a p es máxima o mínima, la recta tangente a γ en q es perpendicular a $q - p$.

Solución.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que la curva γ está arcoparametrizada por $\beta(s)$, con $s \in [0, L]$.

Sea $\beta(s_0) = q$ un punto en γ donde la distancia a p es máxima (o mínima].
Entonces la función $\varphi(s) = \|\beta(s) - p\|^2$ tiene un máximo (o mínimo) local en s_0.

Describe función φ (**1 pto**)

Se deduce que s_0 es un punto crítico de $\varphi(s)$. Argumenta punto critico de φ (**1 pto**)

Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}\|\beta(s) - p\|^2\Big|_{s_0} \\ &= \frac{d}{ds}(\beta(s) - p) \cdot (\beta(s) - p)\Big|_{s_0} \\ &= \beta'(s_0) \cdot (\beta(s_0) - p) + (\beta(s_0) - p) \cdot \beta'(s_0) \\ &= 2\beta'(s_0) \cdot (q - p)\,. \end{aligned}$$

Calcula derivada de φ (**2 ptos**)

Además la recta tangente a la curva en q tiene vector director $T(s_0) := \beta'(s_0)$.

Argumenta recta tg (**1 pto**)

Por lo tanto, la condición $(q - p) \cdot T(s_0) = 0$ muestra que la recta tangente a γ en q es perpendicular al vector $q - p$.

Argumenta perpendicularidad (**1 pto**)

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
SEGUNDO SEMESTRE 2018.

INTERROGACIÓN 2
CALCULO II ⋆ MAT1620

La siguiente evaluación consta de 8 preguntas, dispone de 120 minutos para responderla.

1. Determine si la siguiente serie converge de manera absoluta o condicional o bien es divergente.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^n}{(n+1)4^{2n+1}}.$$

2. Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)}.$$

3. *a*) Determine una representación en serie de potencias para la función,
$$f(x) = \frac{1}{1+2x},$$
indicando el respectivo intervalo de convergencia.

   b) Determine una representación en serie de potencias para la función,
$$f(x) = \frac{x}{(1+2x)^2}.$$
Determine el respectivo intervalo de convergencia.

4. Determine la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(3, -1, 2)$ y es perpendicular al plano que contiene a los puntos
$$(3, -1, 2), \qquad (8, 2, 4), \qquad (-1, -2, -3).$$

5. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}.$$

6. Considere la función

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^3-y}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Determine si es posible definir $f(0,0)$ de modo que f resulte ser continua en $(0,0)$. En caso que esto sea posible defina $f(0,0)$.

7. Considere la función $z = \ln(e^x + e^y)$. Verifique que es una solución de la ecuación,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

8. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus afirmaciones.

   a) El plano tangente a la superficie $z = y\cos(x/2)$ en el punto $(\pi, 1, 0)$ tiene ecuación $2z + x = 2$.

   b) El punto $(-1, 2)$ pertenece a la curva de nivel $k = 9$ de la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

   c) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ es convergente entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ tambien es convergente.

UNA SOLUCIÓN

1. Comenzaremos analizando la convergencia absoluta de la serie dada, es decir la serie de término general

$$a_n = \left| \frac{(-1)^n 10^n}{(n+1)4^{2n+1}} \right|.$$

Utilizando el criterio de la razón,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{10}{16} = \frac{10}{16} < 1.$$

Luego la serie dada es convergente de manera absoluta.
Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por analizar la convergencia con alguno de los criterios dispobibles de manera correcta.
- Asignar 4 puntos por concluir que la serie converge de manera absoluta.

2. Comenzamos calculando el radio de convergencia, R, de la serie de potencias dada,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto $R = 2$. A continuación analizamos en los puntos $x = 2, X = -2$.
En $x = 2$, se tiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}, \qquad \text{, la cual es divergente.}$$

En $x = -2$, se tiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \qquad \text{, la cual es convergente.}$$

Se concluye que el intervalo de convergencia es

$$[-2, 2).$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 3 puntos por el radio de convergencia, calculado correctamente.
- Asignar 1.5 puntos analizar y concluir, de manera correcta, la convergencia en cada uno de los extremos del intervalo respectivo.

3. Se sabe que para $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n, \qquad |x| < \frac{1}{2}.$$

En el interior del intervalo de convergencia es posible derivar, con lo cual,

$$\frac{-2}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n n x^{n-1},$$

multiplicando la igualdad anterior,

$$\frac{-2x}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n n x^n,$$

finalmente,

$$\frac{x}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n-1} n x^n, \qquad |x| < \frac{1}{2}.$$

Notamos que en $x = \frac{1}{2}$ la serie es divergente y que en $x = \frac{-1}{2}$ la función no se encuentra definida.

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 2 puntos por encontrar la serie de potencias.
- a) Asignar 1 punto por el intervalo de convergencia respectivo.
- b) Asignar 1.5 puntos por derivar y obtener a partir de a) la serie.
- b) Asignar 1 punto por obtener la serie respectiva.
- b) Asignar 0.5 puntos por calcular el intervalo de convergencia respectivo.

4. Comenzamos calculando un vector normal, N, al plano que contiene a los tres puntos dados,

$$N = (-13, 17x, 7).$$

Por lo tanto la ecuación de la recta pedida será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix},$$

o bien

$$\begin{cases} x = 3 - 13t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2 + 7t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta un vector normal al plano dado.
- Asignar 3 puntos por escribir de manera correcta la forma paramétrica correcta de la recta pedida.

5. Para calcular el límite pedido, utlizaremos coordenadas polares,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}-1}{r^2},$$

usando la regla de L'Hopital,

$$\lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}-1}{r^2} = 1.$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 3 puntos por utilizar coordenadas polares de manera correcta.
- Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta el valor del límite.

6. Para que la función pueda ser definida en $(0,0)$ el límite en dicho punto debe existir. Calcularemos,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^3-y}.$$

Consideremos los límites,

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x^3-y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{-y} = 1,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x^3-y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3},$$

y este último límite no existe. En conclusión no es posible definir $f(0,0)$ de manera que resulte ser continua.

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por plantear la existencia del límite como la condición necesaria pedida.
- Asignar 3 puntos por verificar la no existencia del límite respectivo.

- Asignar 1 punto por concluir de manera correcta.

7. Comencemos calculando las respectivas derivadas parciales de la función $z = \ln(e^x + e^y)$.

$$z_x = \frac{e^x}{e^x + e^y}, \qquad z_y = \frac{e^y}{e^x + e^y}.$$

de lo anterior se tiene que

$$z_{xx} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}, \quad z_{yy} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}, \quad z_{xy} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}.$$

Reemplazando se obtiene la relación pedida.

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por calcular de manera correcta las derivadas de orden 1.
- Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta las 3 derivadas de orden 2.
- Asignar 1 punto por verificar la ecuación pedida.

8. *a*) Falso, ya que la ecuación del plano tangente es $2z + x = \pi$.
   b) Verdadero, ya que $f(-1, 2) = 9$ por lo tanto pertenece a la curva de nivel pedida.
   c) Falso, por ejemplo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

sin embargo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

es divergente.

Asignación de puntaje:

- Asignar dos puntos por cada afirmación justificada de manera correcta.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
7 noviembre 2018

MAT–1630 - CALCULO III
RESOLUCIÓN INTERROGACIÓN 3

Pregunta 1

Calcule el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = (x,y,-z)$ a través de la porción del plano contenido en el interior del triángulo de vértices (4, 0, 0), (0, 8, 0) y (0, 0, 10), donde el flujo positivo es definido en la dirección positiva de OY.

Solución. La ecuación del plano que pasa por $(4,0,0)$, $(0,8,0)$, $(0,0,10)$ es

$$z = 10 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}y\,. \qquad \boxed{\text{Exhibe ecuación del plano. (\textbf{1.0 pto})}}$$

La porción del plano S pedida es

$$r(x,y) = \left(x, y, 10 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}y\right) \qquad \boxed{\text{Parametriza triángulo. (\textbf{1.0 pto})}}$$

con $(x,y) \in D$, D es el interior del triángulo con vértices $(0,0,0), (4,0,0), (0,8,0)$.

Se tiene que $r_x = \left(1, 0, \frac{-5}{2}\right)$ y $r_y = \left(0, 1, \frac{-5}{4}\right)$ y la orientación S queda determinada por

$$\vec{n} = r_x \times r_y = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, 1\right)\,. \qquad \boxed{\text{Calcula normal. (\textbf{1.0 pto})}}$$

Es decir el flujo pedido es

$$\int\int_S F \cdot \vec{n}\, ds = \int\int_D F(r(x,y)) \cdot \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, 1\right)\, dA \qquad \boxed{\text{Expresa el flujo como integral . (\textbf{0.5 pto})}}$$

Puesto que $D = \{(x,y) : 0 \le y \le 8-2x,\ 0 \le x \le 4\}$ $\boxed{\text{Parametriza interior del triángulo. (\textbf{1.0 pto})}}$

$$\int\int_D \left(x, y, -10 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}y\right) \cdot \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, 1\right)\, dA = \int_0^4 \int_0^{8-2x} \left(5x + \frac{5}{2}y - 10\right)\, dydx$$

$\boxed{\text{Exhibe integral iterada. (\textbf{0.5 pto})}}$

Luego,

$$\int\int_S F \cdot \vec{n}\, ds = \frac{160}{3} \qquad \boxed{\text{Calcula integral. (\textbf{1.0 pto})}}$$

Pregunta 2

Considere la hélice $(\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ con $0 \leq t \leq \pi$. Sea U la superficie que se obtiene al unir cada punto de la hélice horizontalmente con el eje z.

1. Encuentre una parametrización para U.
2. Exprese su área como una integral en una variable.

Solución.

Lo que debemos hacer es unir un punto de la curva con un trazo horizontal, es decir, unir $P(t) = (0, 0, t)$ y $Q(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ con $0 \leq t \leq \pi$.

Una parametrización del segmento de recta que une $P(t)$ con $Q(t)$ es:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1-s)P(t) + sQ(t) \\ &= (1-s)(0,0,t) + s(\cos(t), \operatorname{sen}(t), t) \\ &= (s\cos(t), s\operatorname{sen}(t), t)\end{aligned}$$

con $0 \leq s \leq 1$ y $0 \leq t \leq \pi$. Parametriza U (**2.0 pto**) Tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_t &= (-s\operatorname{sen}(t), s\cos(t), 1) && \text{Calcula } \varphi_t \text{ (**1.0 pto**)} \\ \varphi_s &= (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0) && \text{Calcula } \varphi_s \text{ (**1.0 pto**)} \\ \varphi_s \times \varphi_t &= (\operatorname{sen}(t), -\cos(t), s) && \text{Calcula normal (**1.0 pto**)}\end{aligned}$$

Entonces, el área se calcula

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \|\varphi_s \times \varphi_t\| \, ds d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+s^2}\, ds \, .$$

Expresa área como integral unidimensional (**1.0 pto**)

Haciendo el cambio de variables $s = \tan(\alpha)$ se obtiene la integral

$$A = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sec^3(\alpha) d\alpha = \pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})) \, .$$

Pregunta 3

Calcule la coordenada $\overline{y}$ del centro de masa de una lámina que tiene la forma del cono $y^2 = x^2 + z^2$ entre los planos $y = 1$ e $y = 4$, si su densidad de masa en cada punto (x, y, z) está dada por $\sqrt{x^2 + z^2}$.

Solución. La función densidad de masa es $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$. Una parametrización para la superficie es $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(x, z) = (x, \sqrt{x^2 + z^2}, z)$$

donde $\Omega = \{(x, z) \mid 1 \leq x^2 + z^2 \leq 16\}$. Construye una parametrización (**1.0 pto**)

El vector normal inducido por la parametrización es

$$\varphi_x \times \varphi_z = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, -1, \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right)$$ Calcula normal (**1.0 pto**).

La masa de la supercicie :

$$\begin{aligned}
m &= \iint_\Omega \delta(x, y, z) \|\varphi_x \times \varphi_z\| dxdz \\
&= \iint_\Omega \sqrt{x^2 + z^2} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + z^2} + 1 + \frac{z^2}{x^2 + z^2}} dxdz \\
&= \iint_\Omega \sqrt{2(x^2 + z^2)} dxdz \quad \text{Expresa masa como integral (\textbf{0.5 pto})} \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \int_1^4 \sqrt{2r^2} r dr d\theta \\
&= 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \int_1^4 r^2 dr d\theta = \frac{126\sqrt{2}\pi}{3} . \quad \text{Calcula masa (\textbf{1.0 pto})}
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega y\delta(x, y, z)\, dS &= \iint_\Omega \sqrt{x^2 + z^2} \sqrt{x^2 + z^2} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + z^2} + 1 \frac{z^2}{x^2 + z^2}}\, dxdz \\
&= \iint_\Omega \sqrt{2}(x^2 + z^2)\, dxdz \quad \text{Expresa integral coordenada } y \text{ (\textbf{1.0 pto})} \\
&= 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \int_1^4 r^3\, dr d\theta \quad \text{Cambio de variable (\textbf{0.5 pto})} \\
&= \frac{255\sqrt{2}\pi}{2} \quad \text{Calcula integral (\textbf{0.5 pto})}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{y} = \dfrac{1}{m} \iint_\Omega y\, \delta(x, y, z)\, dS = \dfrac{85}{28}$. Calcula $\tilde{y}$ (**0.5 pto**)

Pregunta 4

Considere S la superficie en $\mathbb{R}^3$ que se genera al rotar el círculo que se encuentra en el plano XY de radio 1 y centro $(x, y, z) = (4\sqrt{2}, 0, 0)$ en torno al eje OY.

1. Determine la ecuación del plano tangente a S en el punto $p = \left(\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{2}\right)$.
2. Determine todos los puntos en S de modo que el plano tangente a S en esos puntos son paralelos al plano XZ.

Solución. (a)

La parametrización de S es la siguiente:

$$\begin{aligned} x(s,t) &= (4\sqrt{2} + \cos(s))\cos(t) \\ y(s,t) &= \operatorname{sen}(s) \\ z(s,t) &= (4\sqrt{2} + \cos(s))\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

con $0 \le s \le 2\pi$, $0 \le t \le 2\pi$. Explicita una parametrización (**0,5 pto**)

Los valores (s,t) que representan al punto p son: $(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = \left(\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{2}\right)$. Calculando, $x^2 + z^2 = (4\sqrt{2} + \cos(s))^2 = 2\frac{9^2}{4}$ y por lo tanto $s = \frac{\pi}{4}$ ó $s = \frac{3\pi}{4}$. Además $(4\sqrt{2} + \cos(s))\cos(t) = \frac{9}{2}$. Luego,

$$(4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})\cos(t) = \frac{9}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}\,. \qquad \text{Calcula } t \text{ y } s \text{ (**0,5 pto**)}$$

Luego la solución es $s = t = \frac{\pi}{4}$.

Cálculo de ector normal del plano en p : $\vec{n} = (x_s, y_s,\ z_s) \times (x_t, y_t,\ z_t)$ en p.

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (-\operatorname{sen}(s)\cos(t), \cos(s), -\operatorname{sen}(s)\operatorname{sen}(t)) \times (-(4\sqrt{2} + \cos(s))\operatorname{sen}(t), 0, (4\sqrt{2} + \cos(s))\cos(t)\,) \\ &= \alpha(\cos t \cos s, \operatorname{sen} s, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s) \end{aligned}$$

donde $\alpha(s) = 4\sqrt{2} + \cos(s) \neq 0$ para todo s.

El vector normal en p es cualquier múltiplo no nulo de $\alpha(\pi/2)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .. Luego, cualquier múltiplo de $(1, \sqrt{2}, 1)$ es un vector normal. Describe vector normal (**1.0 pto**)

La ecuación cartesiana del plano tangente a S en p es:

$$\left(x - \frac{9}{2}\right) + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} + \left(z - \frac{9}{2}\right) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{2}y + z = 10\,.$$ Exhibe ecuación (**1.0 pto**)

Solución. (b) Se pide que los planos tangentes sean paralelos al plano XZ. Luego, la primera y tercera coordenada de $\tilde{\mathbf{n}}$ deben ser cero. Es decir,

$$\cos s \cos t = 0\,, \qquad \cos s \operatorname{sen} t = 0\,. \qquad \text{Explicita condiciones (**1.0 pto**)}$$

Conjunto solución, los dos círculos siguientes:

$$\{(4\sqrt{2}\cos t, 1, 4\sqrt{2}\operatorname{sen} t) : 0 \le t \le 2\pi\}\,, \quad \{(4\sqrt{2}\cos t, -1, 4\sqrt{2}\operatorname{sen} t) : 0 \le t \le 2\pi\}$$

Cada conjunto (**1.0 pto**)

MAT–1630 - CALCULO III
Pauta de Corrección Examen
Segundo Semestre 2018

1. Considere la curva γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (e^t, \operatorname{sen}(e^t - 1), \cos(e^t - 1)), \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

a) Determine una parametrización $\phi(s)$ por longitud de arco de γ con $\phi(0) = (1, 0, 1)$.

b) Calcule la ecuación del plano osculador a γ en $(1, 0, 1)$.

Solución.

a) La parametrización $\vec{r}(t)$ tiene derivada

$$\dot{\vec{r}}(t) = e^t(1, \cos(e^t - 1), -\operatorname{sen}(e^t - 1)) \qquad \boxed{\text{Calcula derivada (**0,5 pto**)}}$$

$$\Longrightarrow \qquad \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{2}\, e^t \qquad \boxed{\text{Calcula longitud (**0,5 pto**)}}$$

Si $\vec{\phi}(s)$ es una parametrización por longitud de arco tal que $\vec{\phi}(0) = \vec{r}(0)$, entonces $s(0) = 0$ obteniendo así que:

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\vec{r}}(u)\|\, du = \sqrt{2}\,(e^t - 1) \qquad \boxed{\text{Calcula } s(t) \text{ (**0,5 pto**)}}$$

$$\Longrightarrow \qquad t = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \qquad \boxed{\text{Calcula } t(s) \text{ (**0,5 pto**)}}$$

Por lo tanto la parametrización por longitud de arco pedida es:

$$\vec{\phi}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1, \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) \qquad \boxed{\text{Explicita } \phi(s) \text{ (**1,0 pto**)}}$$

b) El vector normal que genera el plano osculador es la binormal que corresponde a $\mathbf{b} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ donde $T = \dot{\phi}(s)$ y $\mathbf{N}$ es el vector unitario $\mathbf{N} = \frac{1}{\|\ddot{\phi}(s)\|}\ddot{\phi}(s)$.

Calculando

$$\dot{\vec{\phi}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1, \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)$$

$$\ddot{\vec{\phi}}(s) = \frac{1}{2}\left(0, -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad 2\ddot{\vec{\phi}}(s) = \mathbf{N} \qquad \boxed{\text{Calcula } \mathbf{N} \text{ (**1,0 pto**)}}$$

El vector binormal en $s = 0$ es $\mathbf{b}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0) = \dot{\vec{\phi}}(0) \times 2\ddot{\vec{\phi}}(0)$

$$\vec{b}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1, \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0) \qquad \boxed{\text{Calcula } \mathbf{b}(0) \text{ (**1.0 pto**)}}$$

Donde se concluye que el plano osculador es

$$((x-1), (y-0), (z-1)) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Longrightarrow y - x + 1 = 0\,. \qquad \boxed{\text{Explicita ecuación del plano (**1,0 pto**)}}$$

2. Considere γ la curva en $\mathbb{R}^3$ generada por la intersección de las superficies

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x,y,z)=(y,z,x)$.

Solución.

Sea R la región del plano $x-y+z=0$ que es tapa de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$.

Explicita frontera (**0,5 pto**)

La normal del plano es $\mathbf{N}=(1,-1,1)$. Calcula normal a R frontera (**0,5 pto**)

El rotor del campo $\vec{F}$ está dado por

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{F} &= \left[(\partial_y F_3-\partial_z F_2 \quad , \quad \partial_z F_1-\partial_x F_3 \quad , \quad \partial_x F_2-\partial_y F_1\right] \\ &= (-1,-1,-1) \end{aligned}$$

Calcula rotor (**1,0 pto**)

con $F_1,F_2,F_3)=(y,z,x)$.
Usando el teorema de Stokes tendremos que

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F\cdot d\mathbf{x} &= \int_S (\nabla\times F)\cdot N\, dS \\ &= \int_S (-1,-1,-1)\cdot(1,-1,1)\, dS \end{aligned}$$

Aplica Stokes (**1,5 pto**)

Por lo tanto,

$$\int_\Gamma F\cdot d\mathbf{x} = -(\text{área de } S)$$

Expresa igualdad (**1,0 pto**)

Puesto que el plano pasa por el origen, la intersección de la esfera con el plano es un círculo de radio 1 cuya área es π.

Reconoce la intersección (**0,5 pto**)

Resumiendo,

$$\int_\Gamma F\cdot d\mathbf{x} = -\pi\,.$$

Explicita solución (**1,0 pto**)

3. Considere la curva espiral Γ en el plano $\mathbb{R}^2$ con parametrización $\vec{r}(t) = (\ e^t \cos t,\ e^t \sin t\ )$, $0 \leq t \leq 3\pi$ y el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \left(3x^2 \sin(y^2) + 2x\ ,\ 2x^3 y \cos(y^2) + 1\right).$$

a) Calcule el largo de la curva Γ.

b) Calcule $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solución. Parte (a)

Para calcular el elemento de longitud de arco calculamos primero

$$\vec{r}\,'(t) = (e^t \cos(t) - e^t \sin(t), e^t \sin(t) + e^t \cos(t)) \quad \boxed{\text{Calcula velocidad (}\mathbf{0{,}5\ pto}\text{)}}$$

y su longitud

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(e^t \cos(t) - e^t \sin(t))^2 + (e^t \sin(t) + e^t \cos(t))^2} = \sqrt{2}\, e^t\,. \boxed{\text{Calcula longitud velocidad (}\mathbf{0{,}5\ pto}\text{)}}$$

Luego, el largo $\mathcal{L}(\Gamma)$ de la curva Γ es

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_0^{3\pi} \sqrt{2}\, e^t\, dt = \sqrt{2}(e^{3\pi} - 1)\,. \qquad \boxed{\text{Calcula longitud de curva(}\mathbf{1{,}0\ pto}\text{)}}$$

Solución. Parte (b)

El campo $\vec{F}$ está bien definido y es de clase C^1 en todo el plano. $\boxed{\text{Explicita suavidad (}\mathbf{0{,}5\ pto}\text{)}}$

Además cumple que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2 y \cos(y^2) = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \boxed{\text{Verifica condición (}\mathbf{0{,}5\ pto}\text{)}}$$

Por lo que $\vec{F}$ es conservativo en todo el plano. $\boxed{\text{Prueba que es conservativo(}\mathbf{0{,}5\ pto}\text{)}}$

Aplicamos Teorema Fundamental del Cálculo. Para esto buscamos primero el potencial V del campo vectorial $\vec{F}$.

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = 3x^2 \sin(y^2) + 2x$$

de donde $V(x,y) = x^3 \sin(y^2) + x^2 + g(y)$. Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = 2x^3 y \cos(y^2) + 1$$

Es decir, $V(x,y) = x^3 \sin(y^2) + y + h(x)$.

Por lo tanto, $V(x,y) = x^3 \sin(y^2) + x^2 + y$. $\boxed{\text{Calcula el potencial(}\mathbf{1{,}5\ pto}\text{)}}$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo vemos que

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c \nabla V \cdot d\vec{r} = V(r(3\pi)) - V(r(0)) = V(-e^{3\pi}, 0) - V(1,0) = e^{6\pi} - 1\,.$$

$\boxed{\text{Calcula la integral(}\mathbf{1{,}0\ pto}\text{)}}$

4. Llamemos S a la superficie en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2+y^2+z^2=4\,,\ z\geq 0$. Se define el campo en $\mathbb{R}^3$ por

$$\vec{F}(x,y,z)=(e^{yz},\cos(x),x^2+y^2+z)\,.$$

Calcule el flujo "hacia arriba"de $\vec{F}$ a través de la superficie S.

Solución.
Consideramos S_2 la región del plano $z=0$ dentro de la esfera, y E la región dentro de la esfera y sobre el plano. Describe las regiones (**0,5 pto**)

Como S y S_2 forman la frontera de E, y $\vec{F}$ es continuamente diferenciable podemos usar el Teorema de la Divergencia obteniendo:

$$\iiint_E div(\vec{F})\ dV=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$ Aplica T. Divergencia (**1,0 pto**)

donde la normal se considera hacia arriba en S y hacia abajo en S_2. Explicita dirección normales (**0,5 pto**)
La divergencia $div(\vec{F})=\vec{F}_x+\vec{F}_y+\vec{F}_z$ del campo $\vec{F}$ es constante : $div(\vec{F})=1$ Calcula divergencia (**0,5 pto**)

$$\begin{aligned}\iiint_E div(\vec{F})\ dV &= \iiint_E 1\ dV=\text{Volumen hemisferio de radio 2}\\ &= \frac{16}{3}\pi\,.\end{aligned}$$ Calcula integral sobre E(**1,0 pto**)

Para S_2, pensándola como gráfico de $z=0$ sobre el dominio $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$, pero con la normal apuntando hacia abajo. Entonces, $d\vec{S}=(0,0,-1)dxdy$. Explicita la normal de S_2 (**0,5 pto**)

La integral de superficie a calcular es

$$\begin{aligned}\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_D(1,\cos(x),x^2+y^2)\cdot(0,0,-1)\ dxdy\\ &= \iint_D -x^2-y^2\ dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^2 -r^2\ r\ drd\theta\\ &= -8\pi\end{aligned}$$ Calcula integral de superficie (**1,5 pto**)

Luego

$$\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint_E div(\vec{F})\ dV-\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\frac{16}{3}\pi+8\pi=\frac{40}{3}\pi$$

Explicita el resultado (**0,5 pto**)

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2016

INTERROGACIÓN 1
MAT1630 ⋆ CÁLCULO 3

1. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^7}{x^6+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Analice la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

   b) Calcule todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.

   c) Analice la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

2. Considere la función $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{y+1}}$.

   a) Determine la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto correspondiente a $(x,y) = (1,15)$.

   b) Estime, justificadamente, el valor de $f(0,97; 15{,}05)$.

3. Considere la función

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1$$

   definida en la región

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$$

   Determine los máximos y mínimos locales y absolutos de f.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con segundas derivadas parciales continuas. Considere $z = f(u,v)$ para $u(x,y) = xy, \quad v(x,y) = \dfrac{y}{x}$. Determine

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Una solución.

1. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^7}{x^6+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Analice la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

- En la región $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ la función f es continua por ser el cuociente de la función continua x^7, con la función continua x^6+y^6 y esta última es distinta de cero para todo (x,y) en $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
- Para analizar la continuidad en $(0,0)$ debemos calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Note que $x^6+y^6 \geq x^6$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. AsÃ, para $(x,y) \neq (0,0)$

$$0 \leq \left|\left|\frac{x^7}{x^6+y^6}\right|\right| \leq \left|\left|\frac{x^7}{x^6}\right|\right| = |x| \longrightarrow 0, \quad \text{para } (x,y) \to (0,0),$$

y por el terorema de sandwich $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Esto implica la continuidad de f.

b) Calcule todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.
Sea $\overrightarrow{u} = (a,b)$. La derivada direccional en dirección de $\overrightarrow{u}$ viene dada por

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0} \tfrac{f(0+ah,0+bh)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(ah,bh)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{(ah)^7}{((ah)^6+(bh)^6)h} \\ = \; & \lim_{h\to 0} \tfrac{a^7}{a^6+b^6} = \tfrac{a^7}{a^6+b^6}. \end{aligned}$$

Por tanto $D_{\overrightarrow{u}} f(0,0) = a^7/a^6+b^6$.

c) Analice la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.
Para analizar la diferenciabilidad debemos determinanr la existencia del límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)||}.$$

Para ello primero notemos que

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)||} = \frac{\left|\frac{x^7}{x^6+y^6} - x\right|}{||(x,y)||} = \frac{\left|\frac{xy^6}{x^6+y^6}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

La función f no es diferenciable en $(0,0)$ ya que el límite buscado depende de como nos aproximemos a $(0,0)$. Por ejemplo, cuando nos aproximamos por la recta $x = y$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{|f(x,x) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,x)|}{||(x,x)||} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{x^7}{x^6+x^6} - x\right|}{||(x,x)||}$$

$$= \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{xx^6}{x^6+x^6}\right|}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{|x|}{2\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Por otra parte, cuando nos aproximamos por la recta $x = 0$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{|f(0,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(0,y)|}{||(0,y)||} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{0}{y^6}\right|}{||(0,y)||} = 0.$$

2. Considere la función $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{y+1}}$.

a) Determine la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto correspondiente a $(x,y) = (1,15)$.
Primero calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{(1,15)} = \frac{1}{\sqrt{y+1}}\Big|_{(1,15)} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_{(1,15)} = -\frac{x}{2(y+1)^{3/2}}\Big|_{(1,15)} = -\frac{1}{2(16)^{3/2}} = -\frac{1}{128}$$

Por lo que una ecuación del plano tangente es

$$z = f(1,15) + \nabla f(1,15)\cdot(x-1, y-15)$$
$$z = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{128}(y-15)$$

b) Estime, justificadamente, el valor de $f(0,97; 15{,}05)$.
Las derivadas parciales de f son continuas en un conjunto abierto que contiene a $(1,15)$ (esto pasa por ejemplo en la bola abierta $B_{(1,15)}(1)$, donde las derivadas parciales de f son el cuociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula Por lo tanto, f es diferenciable en ese conjunto abierto
Aproximaremos entonces $f((0,97),(15,05))$ linealmente, es decir

$$\begin{aligned} f((0,97),(15,05)) &\sim f((1,15)) + \tfrac{1}{4}(0,97-1) + \tfrac{1}{128}(15,05-15) \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{0,03}{4} - \tfrac{0,05}{128} = \tfrac{30,99}{128} \end{aligned}$$

3. Para analizar los máximos y mínimos de la función, comenzaremos por el interior de su dominio. Aquí podemos determinar puntos críticos haciendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

$$f_x(x,y) = x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$f_y(x,y) = 2y - 2 = 0$$

Este tiene por solución a los puntos $(1,1);(2,1)$. Pero ninguno de ellos se encuentra en el interior del dominio pedido. Por lo tanto no tenemos máximos o mínimos locales en el interior.

A continuación pasamos a analizar la función en la frontera de su dominio.

Comenzamos analizando los puntos para los cuales $x = 0$, en este caso la función se convierte en

$$f(x) = y^2 - 2y + 1,$$

Que no posee puntos criticos en el interior del segmento para $y \in (0,1)$. Pero el vértice $P_1(0,1)$ si clasifica como candidato a máximo o mínimo absoluto

A continuación analizamos los puntos para los cuales $y = 0, x \in (0,1)$ en este caso la función se convierte en:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1,$$

función que no posee puntos críticos en su interior pero al igual que antes, el vértice $P_2(1,0)$ clasifica como candidato a max. o min.

Finalmente analizamos los puntos que satisfacen $y = 1 - x$ para $x \in (0,1)$. En este conjunto la función se convierte en

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Función que no posee puntos críticos.

En resumen, tenemos que los candidatos son los puntos P_1, P_2 y además el tercer vértice $P_3(0,0)$. Para concluir comparamos los valores de la función en cada uno de ellos.

$$f(P_1) = 0, \quad f(P_2) = \frac{11}{6}, \quad f(P_3) = 1.$$

De donde tenemos que f alcanzan su valor máximo en P_1 y su valor mínimo en P_2.

4. Comenzaremos calculando las derivadas parciales de primer orden de la función $z = f(u, v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u(u, v)\, y + f_v(u, v)\, \frac{-y}{x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_u(u, v)\, x + f_v(u, v)\, \frac{1}{x}.$$

A continuación calculamos las segundas derivadas respectivas, haciendo nuevamente uso de la regla de la cadena,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{uu}(u, v)y^2 - f_u v(u, v)\frac{y^2}{x^2} - f_{vu}(u, v)\frac{y^2}{x^2} + f_{vv}(u, v)\frac{y^2}{x^4} + f_v(u, v)\frac{2y}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{uu}(u, v)x^2 + f_u v(u, v) - f_{vu}(u, v) + f_{vv}(u, v)\frac{1}{x^2}.$$

Finalmente

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4y^2 f_{uv}(u, v) + f_v(u, v)\, \frac{2y}{x}.$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
TEMPORADA DE VERANO 2016

MAT1630 ⋆ CALCULO III
INTERROGACIÓN 2

1. Calcule el volumen de la región encerrada por

$$z = 2 - x^2 - 4y^2, \quad z = 1.$$

2. Sea D la región acotada por las rectas

$$y - x = -2, \quad y + x = 2, \quad y - x = 1, \quad y + x = 0.$$

Calcule

$$\int\int_D (y^2 - x^2)\, dxdy.$$

3. Calcule el valor máximo y mínimo del producto tres números reales x, y, z, si la suma de estos es cero y la suma de sus cuadrados es uno.

4. *a*) Considere la superficie S, definida implícitamente por:

$$z^2y^3 + x^2y^5 + xz = 0.$$

Verifique que S es el gráfico de una función en las cercanías del punto $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

b) Considere

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow \left(x^3 + y^3 + x, y^3 + y + z^7, \frac{z^3}{3} + z \right) \end{aligned}$$

Verifique que la función inversa $F^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ existe.

Una solución

1. Primero notamos que calcular el volumen pedido es equivalente a calcular el volumen encerrado por $z = 1 - x^2 - 4y^2, \quad z = 0$, y esto ltimo se hace a travs de la integral doble

$$\int\int_D 1 - x^2 - 4y^2 \, dx \, dy,$$

donde D es la elipse $x^2 - 4y^2 = 1$.
Podemos realizar el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta); \\ y &= \tfrac{r}{2}\operatorname{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Este cambio tiene por Jacobiano

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\theta) \\ \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2} & \frac{r\cos(\theta)}{2} \end{vmatrix} = \frac{r\cos^2(\theta)}{2} + \frac{r\operatorname{sen}^2(\theta)}{2} = \frac{r}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int\int_D 1 - x^2 - 4y^2 \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\cos^2(\theta) - 4\frac{r^2\operatorname{sen}^2(\theta)}{4}\right)\frac{r}{2}\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\right)\frac{r}{2}\, dr\, d\theta = \pi\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

2. Primero, es fácil notar que la región D es un paralelogramo, esto por que la recta $y - x = -2$ es paralela con $y - x = 1$ y $y + x = 2$ es paralela con $y + x = 0$.
Consideremos en cambio de variables

$$\begin{aligned} u &= y - x; \\ v &= y + x, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La integral que debemos calcular es entonces

$$\int\int_D (y^2 - x^2)\, dxdy = \int\int_{S(D)} uv|S^{-1}|dudv$$

Es fcil ver que el mdulo del Jacobiano $|S^{-1}| = 1/2$. Veamos ahora cual es la accin de S sobre las rectas que definen D.
Para $y - x = -2$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2(x-1) \end{pmatrix}.$$

Para $y - x = 1$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x+1 \end{pmatrix}.$$

Para $y + x = 0$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $y + x = 2$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-x) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras rectas que se obtienen son verticales y las dos segundas son horizontales, y por tanto $S(D)$ es un rectangulo . Tendremos entonces que

$$\int\int_D (y^2 - x^2)\, dxdy = \int\int_{S(D)} uv|S^{-1}|dudv = \int_0^2 \int_{-2}^1 \frac{uv}{2} dudv = \frac{u^2}{4}\Big|_{-2}^1 \frac{v^2}{4}\Big|_0^2 = -\frac{3}{4}$$

3. Consideremos la función $f(x, y, z) = xyz$ y sean $g(x, y, z) = x + y + z$, $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Con estas funciones el problema se reduce a determinar los valores máximos y mínimos de f sujetos a las restricciones

$$g(x, y, z) = 0, \qquad h(x, y, z) = 1.$$

Utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, con lo cual debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z), \\ g(x, y, z) &= 0, \\ h(x, y, z) &= 1. \end{aligned}$$

O equivalentemente

$$\begin{aligned} yz &= \lambda + 2\mu x, \\ xz &= \lambda + 2\mu y, \\ xy &= \lambda + 2\mu z, \\ x + y + z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Eliminando la variable λ de las tres primeras ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} yz - 2\mu x &= xz - 2\mu y, \\ xz - 2\mu y &= xy - 2\mu z, \\ x + y + z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Y agrupando en las dos primeras ecuaciones,

$$\begin{aligned} z(y - x) &= 2\mu(x - y), \\ x(z - y) &= 2\mu(y - z), \\ x + y + z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Analizamos en primer lugar el caso, $y - x = 0$. En este caso tenemos, despues de reemplazar en las otras dos ecuaciones, que

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Por analogía el caso $z - y = 0$ entrega por soluciones

$$x = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Finalmente los casos en que $y - x \neq 0$ o bien $z - y \neq 0$ conducen o bien a una de las soluciones ya encontradas o:

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

En conclusión, hemos obtenidos seis puntos candidatos a máximo o mínimo para la función $f(x, y, z) = xyz$. De evaluar en ella y comparara cada uno de los puntos obtenidos se concluye que

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}},\right) = f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}},\right) = \frac{2}{6\sqrt{6}}$$

es el valor máximo de f.

Análogamente

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}},\right) = f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}},\right) = -\frac{2}{6\sqrt{6}}$$

es el valor mínimo de f.

4. a. Consideremos la función $F(x, y, z) = z^2y^3 + x^2y^5 + xz$. Si $F(x, y, z) = 0$ es el gráfico de una función de clase $\mathcal{C}^1$ en las cercanías del punto $P = (0, 0, 1)$, el T.F.I. nos asegura que una condición necesaria para ello es que, alguna de las siguientes sea distinta de cero,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P), \quad \frac{\partial F}{\partial x}(P), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P).$$

Calculamos cada una de ellas,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2zy^3 + x$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2xy^5 + z$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 3z^2y^2 + 5x^2y^4$$

y evaluamos en el punto pedido,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(P) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0.$$

Por lo tanto la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a $x = x(y, z)$ y por lo tanto la superficie S es el gráfico de una función del tipo $x = f(y, z)$ en las cercanías del punto $(0, 0, 1)$.

b. Para que F^{-1} exista en las cercanías de cada punto debe verificarse, por el Teorema de la Función Inversa, que $det(JF)(x, y, z) \neq 0$ en las cercanías de cada punto. En este caso tenemos:

$$JF = \begin{pmatrix} 3x^+1 & 3y^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 + 1 & 7z^6 \\ 0 & 0 & z^2 + 1 \end{pmatrix},$$

de donde $det(JF)(x, y, z) = (3x^2 + 1)(3y^2 + 1)(z^2 + 1)$ expresión que claramente en distinta de cero para todo (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2016

MAT1630 ⋆ CALCULO III
INTERROGACIÓN 3

1. Considere la región R acotada por

$$(x+3)^2+y^2+(z+2)^2=4, \qquad (z+2)^2=(x+3)^2+y^2.$$

Escriba en coordenadas esféricas y cilíndricas, la integral triple que representa el volumen de R. Calcule dicho volumen.

2. Un sólido tiene forma de cilindro circular recto con radio R y altura h. Si la densidad es directamente proporcional a la distancia a una de las bases, determine las coordenadas del centro de masa del sólido.

3. Considere $F(x,y)=\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2},\dfrac{-x^2}{x^2+y^2}\right)$ definido para (x,y) en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

   a) Calcule la integral de línea del del campo F, $\displaystyle\int_\gamma F\,d\gamma$, para la curva $\gamma(t)=(a\cos(t),a\,\mathrm{sen}(t))$ con $t\in[0,\pi]$, $a\in\mathbb{R}^+$.

   b) Determine si F es, o no, un campo conservativo.

4. Considere R la región interior al cuadrado de vértices $(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)$ y exterior a la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen. Considere

$$F(x,y)=\left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\right)+(-y,x).$$

Sea γ la curva que recorre la frontera de R orientada positivamente. Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma F\,d\gamma$.

Observación: Para la pregunta 2 pueden ser de ayuda las siguientes fórmulas, para calcular el centro de masa de una región R con densidad $\rho(x,y,z)$.

$$M=\int\int\int_R \rho(x,y,z)\,dxdydz, \quad M_{xy}=\int\int\int_R z\rho(x,y,z)\,dxdydz, \quad M_{xz}=\int\int\int_R y\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$M_{yz}=\int\int\int_R x\rho(x,y,z)\,dxdydz \quad (\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\left(\frac{M_{yz}}{M},\frac{M_{xz}}{M},\frac{M_{xy}}{M}\right)$$

Una solución

1. **Solución** Primero hacemos el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= u + 3; \\ y &= v; \\ z &= w + 2. \end{aligned}$$

Este cambio de variables tiene Jacobiano 1 y transforma la región S que est comprendida entre la esfera $u^2 + v^2 + w^2 = 4$ y el cono $w^2 = u^2 + v^2$, en la región R definida más arriba. Por la simetría de la regiń, sólo consideraremos la parte $z \geq 0$, y luego multiplicaremos por 2.

Primero notemos que la esfera y el cono se intersectan en el circulo $u^2 + v^2 = 2$ que está el el plano $w = \sqrt{2}$.

Para calcular el volumen usamos las coordenadas cilíndricas

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(\sqrt{4-r^2} - \sqrt{2}) \, dr$$

$$\pi \int_0^2 (\sqrt{4-s} - \sqrt{2}) \, ds = -\pi \left(\frac{2}{3}(4-s)^{3/2} \Big|_2^2 - 2\sqrt{2} \right) = \pi \frac{16 - 10\sqrt{2}}{3}$$

El volumen de R es por tanto $2\pi(16-10)\sqrt{2}/3$

2. Un sólido tiene forma de cilindro circular recto con radio R y altura h. Si la densidad es directamente proporcional a la distancia a una de las bases, determine las coordenadas del centro de masa del sólido.

Solución La densidad es de la forma $\rho(x, y, z) = \alpha z$. La masa M del sólido la calculamos usando coordenadas cilíndricas:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h \alpha z r \, dz dr d\theta = \alpha 2\pi \frac{R^2}{2} \frac{h^2}{2} = \frac{\alpha \pi R^2 h^2}{2}$$

Dada la simetría del cilindro y de la densidad de este las coordenadas x e y del centro de masa deben ser iguales a cero. La coordenada z la calculamos por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h \alpha z^2 r \, dz dr d\theta = \alpha 2\pi \frac{R^2}{2} \frac{h^3}{3} = \frac{\alpha \pi R^2 h^3}{3}.$$

Entonces el centro de masa es $(0, 0, 2h/3)$.

3. Para calcular la integral de línea pedida, utilizamos la definición, es decir

$$\begin{aligned} \int_\gamma F \, d\gamma &= \int_0^\pi \left(\frac{a^2 \operatorname{sen}^2(t)}{a^2}, \frac{-a^2 \cos^2(t)}{a^2} \right) \cdot (-a \operatorname{sen}(t), a \cos(t)) \, dt \\ &= -a \int_0^\pi (\operatorname{sen}^3(t) + \cos^3(t)) \, dt = \frac{-4a}{3}. \end{aligned}$$

Para determinar si el campo es o no conservativo, comenzaremos calculando la integral de linea para otra curva, que tenga los mismos extremos que la curva de la parte anterior. Sin perdida de generalidad, consideraremos el caso $a = 1$ y la curva que consta de los tres segmentos dador por:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (1, t), \quad t \in [0, -1] \\ \gamma_2(t) &= (t, -1), \quad t \in [-1, 1] \\ \gamma_3(t) &= (-1, t), \quad t \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

Procedemos a calcular

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} F(x,y)d\gamma = \int_{\gamma_1} F(x,y)\,d\gamma + \int_{\gamma_2} F(x,y)\,d\gamma + \int_{\gamma_3} F(x,y)\,d\gamma = \pi.$$

Por lo tanto, si el campo fuese conservativo, la integral de linea sobre curvas que tienen los mismos extremos tendría el mismo valor, pero las integrales, que hemos calculado entregan distintos valores. Se concluye que F no es conservativo en su dominio.

4. Notemos que el campo F es de clase $\mathcal{C}^1$ en el interior de la región R, luego por el Teorema de Green, la integral pedida se puede calcular como:

$$\int_{\gamma} F\,d\gamma = \int\int_{R} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\,dxdy.$$

Donde $M = \dfrac{y}{x^2+y^2} - y; \quad N = \dfrac{-x}{x^2+y^2} + x$ y por lo tanto

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 2$$

Se concluye que,

$$\int_{\gamma} F\,d\gamma = \int\int_{R} 2\,dxdy = 2Area(R) = 2(4-\pi).$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
TAV 2017

Pauta Interrogación 1.

MAT 1630. Calculo 3.

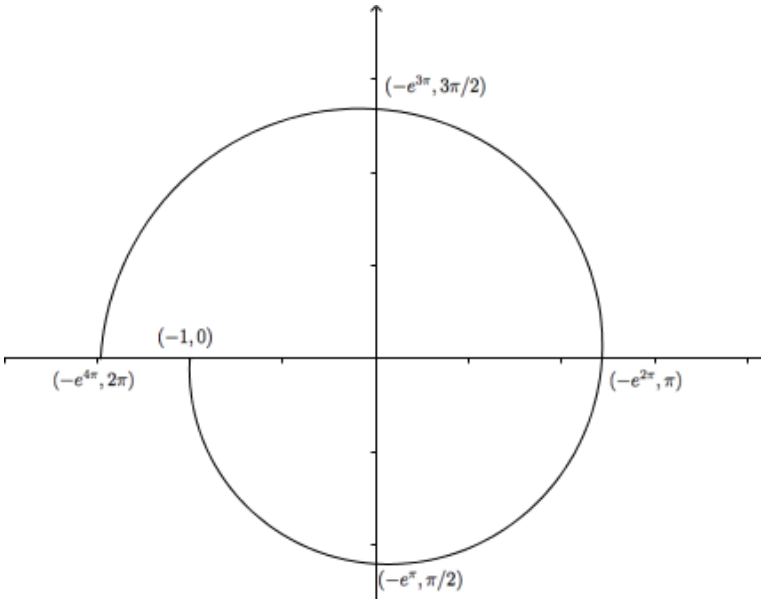
1. *a*) Demuestre que la fórmula de longitud de curva de la curva polar $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ esta dada por:
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + (r')^2(\theta)}\, d\theta.$$
b) Use lo anterior para encontrar la longitud de la curva polar $r(\theta) = -e^{2\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
c) Graficar la curva anterior.

Solución.

a) La curva polar $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ se parametriza como
$$\alpha(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2].$$
Un cálculo muestra que
$$\alpha'(\theta) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)$$
y
$$\|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{(r')^2(\theta) + r^2(\theta)}.$$
Por lo tanto, usando la fórmula de longitud de curva para curvas paramétricas tenemos que la longitud de la curva polar $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ esta dada por
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + (r')^2(\theta)}\, d\theta.$$

b) Usando la fórmula anterior tenemos que la longitud de la curva polar $r(\theta) = -e^{2\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ es
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\theta) + (r')^2(\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}e^{2\theta}\, d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1).$$

c) La función $r(\theta) = -e^{2\theta}$ es decreciente y negativa en el intervalo $\theta \in [0, 2\pi]$. El gráfico se muestra en la figura a continuación



□

2. *a*) Demuestre que la fórmula de curvatura de la curva polar $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ esta dada por:

$$\kappa(\theta) = \frac{-r''(\theta)r(\theta) + 2(r')^2(\theta) + r^2(\theta)}{(r^2(\theta) + (r')^2(\theta))^{3/2}}.$$

b) Calcular $\kappa(\pi/3)$ para la curva polar $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$.

Solución.

a) Usando las ecuaciones $x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$ y $y(\theta) = r(\theta)\sin\theta$ tenemos que

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, \\ x''(\theta) &= r''(\theta)\cos\theta - 2r'(\theta)\sin\theta - r(\theta)\cos\theta, \\ y'(\theta) &= r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta \\ y''(\theta) &= r''(\theta)\sin\theta + 2r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta. \end{aligned}$$

Luego, usando la fórmula de curvatura para curvas paramétricas tenemos que

$$\kappa(\theta) = \frac{y''(\theta)x'(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)}{((x')2(\theta) + (y')^2(\theta))^{3/2}} = \frac{-r''(\theta)r(\theta) + 2(r')^2(\theta) + r^2(\theta)}{(r^2(\theta) + (r')^2(\theta))^{3/2}}.$$

b) Usando la fórmula anterior para la curva $r = 1 + \cos\theta$ tenemos

$$\kappa(\theta) = \frac{3}{2^{3/2}(1 + \cos\theta)^{1/2}}.$$

Por lo tanto

$$\kappa(\pi/3) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

3. Sea $\alpha(s)$ una curva arcoparametrizada con curvatura constante. Sean $\vec{T}_\alpha$ y $\vec{N}_\alpha$, respectivamente, los vectores tangente y normal unitario de α. Calcular $\beta' \cdot \beta'''$, donde $\beta(s) = -3\alpha(s) + 5\vec{T}_\alpha(s) + \vec{N}_\alpha(s)$.

Solución. Unos cálculos muestran que

$$\begin{aligned}\beta' &= -3\alpha' + 5T'_\alpha + N'_\alpha \\ &= -3T_\alpha + 5kN_\alpha - kT_\alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta'' &= -3T'_\alpha + 5kN'_\alpha - kT'_\alpha \\ &= -3kN_\alpha - 5k^2T_\alpha - k^2N_\alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta''' &= -3kN'_\alpha - 5k^2T'_\alpha - k^2N'_\alpha \\ &= 3k^2T_\alpha - 5k^3N_\alpha + k^3T_\alpha.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\beta \cdot \beta''' = -(3+k)(3k^2+k^3) - 25k^4.$$

□

4. Considere la curva

$$\alpha(t) = \left(\frac{2}{t^2+1} - 1, \frac{2t}{t^2+1}\right), t \in \mathbb{R}.$$

a) Encuentre el arcoparámetro de α.
b) Arcoparametrizar α.

Solución.

a) Unos cálculos muestran que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \left(\frac{-4t}{(t^2+1)^2}, \frac{2(1+t^2)-4t^2}{(t^2+1)^2}\right) \\ &= \left(\frac{-4t}{(t^2+1)^2}, \frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||\alpha'|| &= \frac{\sqrt{16t^2+4-8t^2+4t^4}}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{4(t^2+1)^2}}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{2}{t^2+1}.\end{aligned}$$

Luego, el arcoparámetro $s(t)$ es

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_{-\infty}^{t} ||\alpha'(x)||dx \\ &= 2\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= 2\arctan(t) + \pi.\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1. *El límite inferior en la integral del arcoparámetro se puede escoger de manera arbitraria.*

b) Para arcoparametrizar la curva calculamos $t(s) = s^{-1}(t)$, es decir,

$$s = 2\arctan(t) + \pi \Leftrightarrow t(s) = \tan\left(\frac{s-\pi}{2}\right).$$

Luego, la arcoparametrización de α se obtiene reemplazando $t(s)$ en la curva $\alpha(t)$, es decir,

$$\alpha(s) = (\cos(s-\pi), \sin(s-\pi)),\ s \in [0, 2\pi].$$

□

5. Considere la circunferencia $C : (x-1/2)^2 + y^2 = 1/4$ y la recta $L : x = 1$. Desde el origen de coordenadas se traza una semi-recta R que corta a C y L en los puntos P y Q respectivamente. Si rotamos R alrededor del origen, el punto medio entre P y Q describirá una curva que denominaremos α. Encuentre una parametrización de la curva α.

Solución. La semi recta R tiene ecuación,

$$y = \tan(\theta)x,\ x > 0 \text{ y } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

El punto $P = R \cap C$ se calcula mediante

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} &\Longrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \tan(\theta)^2 x^2 = \frac{1}{4} \\ &\Longrightarrow x^2 \sec(\theta)^2 - x = 0 \\ &\Longrightarrow P = \left(\cos(\theta)^2, \sin(\theta)\cos(\theta)\right).\end{aligned}$$

Por otra parte, el punto $Q = R \cap L$ se calcula mediante

$$(1, y) \Longrightarrow Q = (1, \tan(\theta)).$$

Por tanto, la curva α está parametrizada por

$$\alpha(\theta) = \frac{P+Q}{2} = \left(\frac{\cos(\theta)^2 + 1}{2}, \frac{\sin(\theta)\cos(\theta) + \tan(\theta)}{2}\right), \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

□

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
TAV 2017

Pauta Interrogación 2.

MAT 1630. Cálculo 3.

1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva arcoparametrizada que satisface que todos los planos normales a la curva pasan por un punto fijo c. Demuestre que la torsión τ_α y la curvatura κ_α de α satisfacen
$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha}\right)'.$$
Recuerde que: El plano normal a una curva es aquel plano vectorial que esta generado por los vectores normal y binormal de la curva.

Solución. La curva α satisface para cada s,
$$(c-\alpha)\cdot T_\alpha = 0. \tag{1}$$
Derivando (1) obtenemos
$$-T_\alpha \cdot T_\alpha + (c-\alpha)\cdot \dot{T}_\alpha = 0 \Leftrightarrow (c-\alpha)\cdot N_\alpha = \frac{1}{\kappa_\alpha}. \tag{2}$$
Derivando (2) obtenemos
$$-T_\alpha \cdot N_\alpha + (c-\alpha)\cdot \dot{N}_\alpha = \frac{-\dot{\kappa_\alpha}}{\kappa_\alpha^2} \Leftrightarrow (c-\alpha)\cdot(-\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha) = \frac{-\dot{\kappa_\alpha}}{\kappa_\alpha^2}.$$
Por tanto, esto junto con (1), obtenemos que
$$(c-\alpha)\cdot B_\alpha = \frac{-\dot{\kappa_\alpha}}{\tau_\alpha \kappa_\alpha^2}. \tag{3}$$
Finalmente derivamos (3) para obtener que
$$-T_\alpha \cdot B_\alpha + (c-\alpha)\cdot -\tau_\alpha N_\alpha = \left(\frac{-\dot{\kappa_\alpha}}{\tau_\alpha\kappa_\alpha^2}\right)' \Leftrightarrow -\tau_\alpha\left((c-\alpha)\cdot N_\alpha\right) = \left(\frac{-\dot{\kappa_\alpha}}{\tau_\alpha\kappa_\alpha^2}\right)'.$$
Lo anterior junto con (2), tenemos que
$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \left(\frac{\dot{\kappa_\alpha}}{\tau_\alpha\kappa_\alpha^2}\right)'. \tag{4}$$
□

2. Considere las esferas de ecuación $E_1 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ y $E_2 : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. La intersección de las esferas E_1 y E_2 es una curva que llamaremos α.

   a) Encuentre una parametrización de α.
   b) Encuentre la curvatura y torsión de α.

Solución.

a) De la primera y segunda ecuación se concluye que $z = y$. Reemplazando esto último en la ecuación $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ tenemos que $x^2 + y^2 + (y-1)^2 = 1$ que es equivalente, por completación de cuadrados, a

$$x^2 + \left(\sqrt{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

De esta manera, tenemos que

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \quad \sqrt{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \quad \text{y} \quad z = y,$$

es decir

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t.$$

Por lo tanto,

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t\right), t \in \mathbb{R}$$

es una parametrización de la curva $E_1 \cap E_2$.

b) Unos cálculos muestran que

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\cos t\right) \\
\alpha''(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, -\frac{1}{2}\sin t, -\frac{1}{2}\sin t\right) \\
\alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la curvatura es

$$\kappa_\alpha = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = (\sqrt{2})^3.$$

Como la curva α satisface que $z = y$ (ecuación de un plano), entonces concluímos que $\tau_\alpha = 0$ (Esto también se puede verificar haciendo los cálculos respectivos!!!).

□

3. *a*) Sea

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2z + 2xz^2, 2xyz, xy^2 + 2x^2z\right).$$

Encuentre $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ y $f(1,1,1) = \sqrt{\pi}/17$.

b) Sea $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcular

$$\int_\alpha f,$$

donde f es la función escalar encontrada en la parte anterior.

Solución.

a) Calculamos la integral con respecto a x de la primera función coordenada,

$$\int y^2z + 2xz^2 dx = xy^2z + x^2z^2 + A(y,z). \tag{5}$$

Para calcular $A(y,z)$, derivamos (5) con respecto a y e igualamos con la segunda función coordenada,

$$2xyz + \frac{\partial A}{\partial y} = 2xyz. \tag{6}$$

De esto obtenemos que A no depende de la variable y. Repetimos el argumento con z y la tercera función coordenada, o sea

$$xy^2 + 2x^2z + \frac{\partial A}{\partial z} = xy^2 + 2x^2z. \tag{7}$$

Por tanto A tampoco depende de z. Luego, un potencial que sirve es

$$f(x,y,z) = xy^2z + x^2z^2 + A.$$

Imponemos la condición inicial, $f(1,1,1) = \sqrt{\pi}/17$, tenemos que

$$A + 2 = \frac{\sqrt{\pi}}{17} \Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{\pi}}{17} - 2.$$

$$f(x,y,z) = xy^2z + x^2z^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{17} - 2.$$

b) Calculamos $||\dot{\alpha}||$,

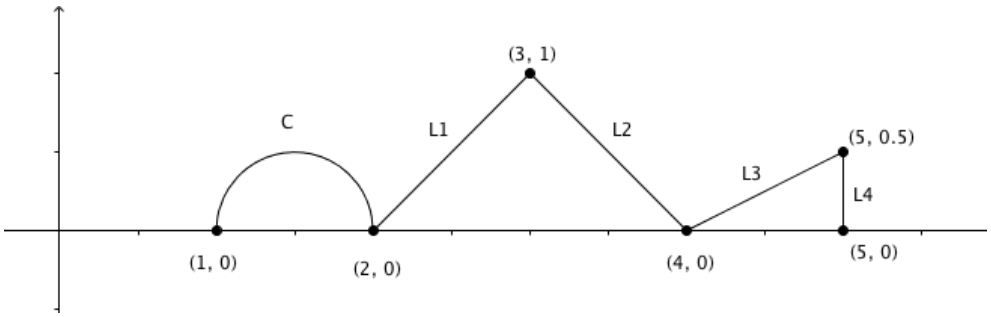
$$\dot{\alpha} = (-\sin(t), \cos(t), 1) \Rightarrow ||\dot{\alpha}|| = \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2 + 1} = \sqrt{2}.$$

Por tanto la integral de linea de f con respecto a α corresponde a

$$\begin{aligned}\int_\alpha f &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos(t)\sin(t)^2 t + \cos(t)^2 t^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{17} - 2\right) dt \\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{7\pi}{2} + \frac{2\sqrt{\pi^3}}{17} + \frac{4\pi^3}{3}\right).\end{aligned}$$

□

4. Considere la curva α que une los puntos $(1,0)$ y $(5,0)$, recorrida en sentido antihorario, que se obtiene por yuxtaposición de las curvas C, L_1, L_2, L_3 y L_4 como lo muestra la siguiente figura.



Aquí, C es la circunferencia de centro $(3/2, 0)$ y radio $1/2$ y las curvas L_1, L_2, L_3 y L_4 son segmentos de rectas. Sea $\vec{F}$ el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - y, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + x \right).$$

Calcular $\int\limits_{\alpha} \vec{F}$.

Solución. Primero que todo notar que si

$$P = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - y \quad \text{y} \quad Q = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + x$$

entonces

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2.$$

Sea β una curva que une los puntos $(1,0)$ y $(5,0)$, con la misma orientación que α, de modo que la curva $\beta^- \oplus \alpha$ tenga orientación positiva. De esta manera, por la fórmula de Green

$$\int\limits_{\alpha} \vec{F} = \int\limits_{\beta} \vec{F} + \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int\limits_{\beta} \vec{F} + 2 \cdot A(D),$$

donde D es el dominio interior a la curva $\beta^- \oplus \alpha$ y $A(D)$ es su área. Los cálculos se simplifican si escogemos $\beta(t) = (5-4t, 0)$, $t \in [0,1]$ (parametrización del segmento de recta que une los puntos $(1,0)$ y $(5,0)$ con la misma orientación que α). De esta manera, $A(D) = (\pi + 10)/8$ y

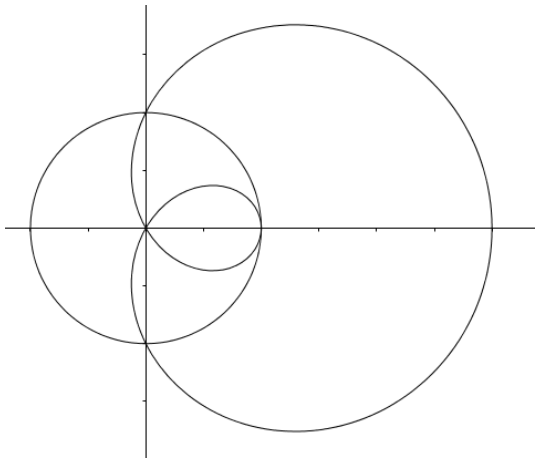
$$\int\limits_{\beta} \vec{F} = \int_0^1 \vec{F}(5-4t, 0) \cdot (-4, 0) dt = \int_0^1 \left(0, -\frac{1}{(5-4t)^2} + 5 - 4t \right) \cdot (-4, 0) dt = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\alpha} \vec{F} = \frac{\pi + 10}{4}.$$

□

5. En la siguiente figura se muestran las gráficas de las curvas polares $r = 1$ y $r = 1 + 2\cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.



Calcule el área de la región interior a $r = 2$ que se encuentra en el interior de $r = 1 + 2\cos\theta$ pero fuera del lazo de la curva $r = 1 + 2\cos\theta$.

Solución. El área de la región se calcula según

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} 1^2\, d\theta + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (1 + 2\cos\theta)^2\, d\theta - \int_{\pi}^{4\pi/3} (1 + 2\cos\theta)^2\, d\theta \\ &= 3\sqrt{3} - 4. \end{aligned}$$

□

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
TAV 2017

Interrogación 3.

MAT 1630. Cálculo 3.

1. *a*) Sean f, g y h tres funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Calcular el rotacional del campo vectorial $\vec{F} = (f(x), g(y), h(z))$.
   b) Sean f y g dos funciones de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. Calcule

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g).$$

Solución.
a) Calculamos el rotor de $F = (f(x), g(y), h(z))$:

$$\operatorname{rot}(F) = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y) = (0, 0, 0).$$

b) Notar que

$$\operatorname{rot}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g + f\operatorname{rot}(\nabla g).$$

Como el rotor de cualquier campo gradiente es cero, tenemos que

$$\nabla f \times \nabla g = \operatorname{rot}(f\nabla g).$$

Tomamos divergencia de esta igualdad y nos queda

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(f\nabla g)) = 0,$$

dado que la divergencia de un campo rotacional es siempre cero.
□

2. Sea S la superficie definida por la ecuación $z = f(x, y)$, donde $x^2 + y^2 < R^2$. Suponga que las derivadas parciales de f son continuas y satisfacen $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leq 1$ y $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leq 1$. Demuestre que el área de S es menor o igual a $\sqrt{3}R^2\pi$.

Solución. La superficie $z = f(x, y)$ se parametriza por $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y

$$\begin{aligned}\phi_x &= (1, 0, f_x)\\ \phi_y &= (0, 1, f_y)\\ \phi_x \times \phi_y &= (-f_x, -f_y, 1)\\ ||\phi_x \times \phi_y|| &= \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.\end{aligned}$$

Por tanto, el área de la superficie corresponde a

$$A(S) = \iint_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy.$$

Como $|f_x|, |f_y| \leq 1$, tenemos que $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \leq \sqrt{3}$. Luego,

$$A(S) \leq \iint_U \sqrt{3} dxdy = \sqrt{3} A(U) = \sqrt{3}\pi R^2.$$

□

3. Sea $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

   a) Encuentre una parametrización de S.
   b) Calcular

   $$\int_S \vec{F},$$

   donde $\vec{F} = (x, y, x)$ y S esta orientada según los vectores normales apuntando hacia el interior de S.

Solución.
a) Una parametrización es $\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$, $u^2 + v^2 < 2$.
b) Usando la parametrización anterior tenemos que

$$\vec{N}(u, v) = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1\right)$$

es el campo de vectores que nos da la orientación pedida. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F} &= \int\int_{u^2+v^2<2} \vec{F}(u,v,\sqrt{u^2+v^2}) \cdot \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right) dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2<2} (u,v,u) \cdot \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right) dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2<2} (-\sqrt{u^2+v^2}+u) dA \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (-\sqrt{r^2}+r\cos\theta) r d\theta\, dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (-^2+r^2\cos\theta) r d\theta\, dr = -\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

□

4. Sea $\vec{F} = (x^3/3, y^3/3+2, x-y)$ y S la superficie cuya parametrización es

$$\varphi(u,v) = (2uv, u^2-v^2, u^2+v^2), \quad u^2+v^2 \leq 1$$

y la orientación de S esta dada según el vector $\varphi_v \times \varphi_u$.

a) Calcular $rot(\vec{F})$ y $div(\vec{F})$.
b) Calcular

$$\int_S div(\vec{F}).$$

c) Calcular

$$\int_S rot(\vec{F}).$$

Solución.
a) Unos cálculos muestran que $rot(\vec{F}) = (-1,-1,0)$ y $div(\vec{F}) = x^2+y^2$.
b) Unos cálculos muestran que

$$\varphi_v \times \varphi_u = (-8uv, -4u^2+4v^2, 4u^2+4v^2)$$

y $\|\varphi_v \times \varphi_u\| = \sqrt{32}(u^2+v^2)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_S div(\vec{F}) &= \int\int_{u^2+v^2<1} div(\vec{F})(\varphi(u,v))\|\varphi_v \times \varphi_u\|\, dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2<1} div(\vec{F})(\varphi(u,v))\|\varphi_v \times \varphi_u\|\, dA \\
&= \sqrt{32}\int\int_{u^2+v^2<1} (u^2+v^2)^3\, dA \\
&= \sqrt{32}\int_0^1\int_0^{2\pi} r^7\, d\theta\, dr = \pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$c)$ Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_S rot(\vec{F}) &= \int\int_{u^2+v^2<1} rot(\vec{F})(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_v \times \varphi_u)\, dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2<1} (-1,-1,0)\cdot(-8uv, -4u^2+4v^2, 4u^2+4v^2)\, dA \\
&= \int\int_{u^2+v^2<1} (8uv + 4u^2 - 4v^2)\, dA \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} 4r^3(\sin(2\theta)+\cos(2\theta))\, d\theta\, dr \\
&= \left(\int_0^1 4r^3\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi}(\sin(2\theta)+\cos(2\theta))\, d\theta\right) = 0
\end{aligned}$$

□

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
TAV 2017

Interrogación 4.

MAT 1630. Cálculo 3.

1. Sea S la superficie que se obtiene al unir $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2+y^2-1,\, z \leq 0\}$ con $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\, z \geq 0\}$ orientada según los vectores normales apuntando hacia el exterior de S y sea $\vec{F} = (e^{y^2+z^2}, e^{z^2+x^2}, e^{x^2+y^2})$. Calcular

$$\int_S rot(\vec{F}).$$

Solución. Notar que S es una superficie que encierra el sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, x^2+y^2 \leq 1,\, x^2+y^2-1 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

Por lo tanto, por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\iint_S \mathrm{Rot}(F) \cdot dS = \iiint_V \mathrm{div}\left(\mathrm{Rot}(F)\right) dV = 0,$$

pues la divergencia de un rotor es siempre cero. □

2. Sea S la porción del plano $2x+y+2z = 2$ en el primer octante cuya orientación esta dada según los vectores normales que apuntan en la misma dirección que $(2,1,2)$. Sea α la curva frontera de S orientada según la orientación de S y $\vec{F} = (x+y^2, y+z^2, z+x^2)$. Calcular

$$\int_\alpha \vec{F}.$$

Solución. Notamos que la superficie S dada por el gráfico de la función $z(x,y) = 1-x-\dfrac{y}{2}$ con $(x,y) \in [0,1] \times [0, 2-2x]$ satisface $\partial S = \gamma$.

Unos cálculos muestran que

$$\phi(x,y) = \left(x, y, 1 - x - \frac{y}{2}\right) \to \phi_x \times \phi_y = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$$
$$\mathrm{Rot}(F) = -2\,(z,x,y) \to \mathrm{Rot}(F) \circ \phi = -2\left(1 - x - \frac{y}{2}, x, y\right)$$
$$\mathrm{Rot}(F) \circ \phi \cdot \phi_x \times \phi_y = x - y - 1.$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de Stokes tenemos

$$\int_\gamma F = \iint_S \mathrm{Rot}(F) \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2-2x} x - y - 1\, dydx = -\frac{4}{3}.$$

□

3. Sea V el sólido en $\mathbb{R}^3$ definido por $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 1\}$ y sea S su frontera. Calcular

$$\int_S \vec{F},$$

donde $\vec{F} = (y, x, xz)$.

Solución. Por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F} &= \int\int\int_V div(\vec{F})\, dV \\
&= \int\int\int_V x\, dV \\
&= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_0^1 x\, dz\right) d(x,y) \\
&= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} x\, d(x,y) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 r^2\, dr\right) = 0
\end{aligned}$$

□

4. Sea S la superficie que se obtiene al unir $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+(z-2)^2 = 1,\ 2 \le z \le 3\}$ con $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 1,\ 0 \le z \le 2\}$ orientada según los vectores normales apuntando hacia el exterior de S. Calcular

$$\int_S \vec{F},$$

donde $\vec{F} = (2x + y^2 z, 3y - x^2, 4z - x)$.

Solución. Sea $S_2 = \{(x,y,0) \,:\, x^2+y^2 \le 1\}$. Luego

$$\int_S \vec{F} = \int_{S \cup S_2} \vec{F} - \int_{S_2} \vec{F}.$$

Si V es la región interior de $S \cup S_2$ entonces por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\int_{S \cup S_2} \vec{F} = \int\int\int_V 9\, dV = 9 \cdot Vol(V) = 9\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} \vec{F} &= \int_{u^2+v^2 \le 1} \vec{F}(u,v,0) \cdot (0,0,-1)\, dA \\
&= \int_{u^2+v^2 \le 1} (2u, 3v - u^2, -u) \cdot (0,0,-1)\, dA \\
&= \int_{u^2+v^2 \le 1} u\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 r^2\, dr\right) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_S \vec{F} = 9\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right).$$

□

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2018

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 1

1. Parametrice por longitud de arco $\lambda(t) = (e^{2t}cos(2t), e^{2t}sen(2t), 5), \quad t \geq 0$. Encuentre su curvatura en $(1, 0, 5)$.

   Solución. Tenemos que

   $$\lambda'(t) = (2e^{2t}\cos(2t) - 2e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t), 2e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t) + 2e^{2t}\cos(2t), 0) \Longrightarrow \|\lambda'(t)\|^2 = 8e^{2t}$$

   La función longitud de arco viene dada por

   $$s(t) = \int_0^t \|\lambda'(u)\|\, du = 2\sqrt{2}\int_0^t e^{2u}\, du = \sqrt{2}(e^{2t} - 1)\,.$$

   La inversa de la función longitud de arco es

   $$s^{-1}(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + 1\right)\,.$$

   Entonces, la parametrización por longitud de arco queda:

   $$\lambda(s) = (\omega\cos(\ln(\omega)), \omega\,\mathrm{sen}(\ln(\omega)), 5)\ , \qquad s \geq 0$$

   donde $\omega = s/\sqrt{2} + 1$.
   Notemos que $\lambda(0) = (1, 0, 5)$. Para calcular la curvatura, usamos la fórmula $\kappa(0) = \|\lambda''(0)\|$. Se tiene que

   $$\begin{aligned}\lambda'(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\ln(\omega)) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(\ln(\omega)), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\ln(\omega)) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(\ln(\omega), 0\right)\\ \lambda''(s) &= \left(-\frac{1}{2\omega}\,\mathrm{sen}(\ln(\omega)) - \frac{1}{2\omega}\cos(\ln(\omega)), \frac{1}{2\omega}\cos(\ln(\omega)) - \frac{1}{2\omega}\,\mathrm{sen}(\ln(\omega)), 0\right)\end{aligned}$$

   Por lo tanto,

   $$\kappa(0) = \|\lambda''(0)\| = \|(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

   Puntaje Pregunta 1.

   - 2 puntos por calcular la función longitud de arco.
   - 2 puntos por dar la pametrización de λ por longitud de arco.
   - 2 puntos por calcular la curvatura.

2. Parametrice la curva dada por la intersección de la superfice $A = \{(tcos(t), tsen(t), z) : t > 0, z \in \mathbb{R}\}$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Encuentre la recta tangente y el plano normal en $(-\pi, 0, \pi^2)$.

Solución. Note que $z = x^2 + y^2 = t^2\cos^2(t) + t^2\,\mathrm{sen}^2(t) = t^2$. Entonces una paramatrización de la curva es

$$\lambda(t) = (t\cos(t), t\,\mathrm{sen}(t), t^2)\,, \qquad t > 0\,.$$

Ahora bien, el vector tangente de la curva es:

$$\lambda'(t) = (\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t) + t\cos(t), 2t)$$

Como $\lambda(0) = (-\pi, 0, \pi^2)$ entonces el vector $v = \lambda'(\pi) = (-1, -\pi, 2\pi)$ es un vector paralelo a la recta tangente en $(-\pi, 0, \pi^2)$. Se sigue que la ecuación de la recta es:

$$\frac{x+\pi}{-1} = \frac{y}{-\pi} = \frac{z-\pi^2}{2\pi}$$

o bien

$$\begin{cases} x &= -\pi - t \\ y &= -\pi t \\ z &= \pi^2 + 2\pi t \end{cases} , t \in \mathbb{R}\,.$$

La ecuación del plano normal viene dada por:

$$[(x, y, z) - (-\pi, 0, \pi^2)] \cdot \lambda'(\pi) = 0 \Longleftrightarrow -(x+\pi) - \pi y + 2\pi(z - \pi^2) = 0\,.$$

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por obtener la parametrización incluido el intervalo de la curva.
- 2 puntos por obtener la ecuación de la recta tangente.
- 2 puntos por obtener la ecuación del plano normal.

3. Demuestre que la curva $\lambda : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}^3$,

$$\lambda(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t}\right)$$

es plana. Determine la ecuación del plano en que se encuentra.

Solución. Sea $\lambda(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Basta probar que la curvatura de la curva es cero. Recuerde que

$$\tau = \frac{(\lambda' \times \lambda'') \cdot \lambda'''}{\|\lambda' \times \lambda''\|^2}\,.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
(\lambda' \times \lambda'') \cdot \lambda''' &= \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{(1-t)^2} & \frac{2t}{(1-t^2)^2} & \frac{-1}{(1+t)^2} \\ \frac{4}{(1-t)^3} & \frac{2+6t^2}{(1-t^2)^3} & \frac{2}{(1+t)^3} \\ \frac{12}{(1-t)^4} & \frac{24t+24t^3}{(1-t^2)^4} & \frac{-6}{(1+t)^4} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)^2(1+t)^2} \begin{vmatrix} 2 & 2t & -1 \\ \frac{4}{1-t} & \frac{2+6t^2}{1-t^2} & \frac{2}{1+t} \\ \frac{12}{(1-t)^2} & \frac{24t+24t^3}{(1-t^2)^2} & \frac{-6}{(1+t)^2} \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Entonces, la curva es plana y está contenida en el plano osculador, que tiene vector normal $B(t)$. Observe que amplificando las fracciones se ve que

$$\begin{aligned}
\lambda'(t) &= \left(\frac{2}{(1-t)^2}, \frac{2t}{(1-t^2)^2}, \frac{-1}{(1+t)^2}\right) = \left(\frac{2(1+t)^2}{(1-t^2)^2}, \frac{2t}{(1-t^2)^2}, \frac{-(1-t)^2}{(1-t^2)^2}\right) \\
\lambda''(t) &= \left(\frac{4}{(1-t)^3}, \frac{2+6t^2}{(1-t^2)^3}, \frac{2}{(1+t)^3}\right) = \left(\frac{4(1+t)^3}{(1-t^2)^3}, \frac{2+6t^2}{(1-t^2)^3}, \frac{2(1-t)^3}{(1-t^2)^3}\right)
\end{aligned}$$

Entonces, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lambda' \times \lambda'' &= \frac{1}{(1-t^2)^5}(4t(1-t)^3 + (2+6t^2)(1-t)^2, -(4(1+t)^2(1-t)^3 + 4(1+t)^3(1-t)^2), \\
&\qquad 2(1+t)^2(2+6t^2) - 8t(1+t)^3) \\
&= \frac{1}{(1-t^2)^5}((1-t)^2(2+4t+2t^2), -(1-t)^2(1+t)^2(4(1-t)(+4(1+t)), (1+t)^2(4-8t+4t^2)) \\
&= \frac{1}{(1-t^2)^5}(2(1-t)^2(1+t)^2, -8(1-t)^2(1+t)^2, 4(1+t)^2(1-t)^2) \\
&= \frac{1}{(1-t^2)^5}(2(1-t^2)^2, -8(1-t^2)^2, 4(1-t^2)^2) \\
&= \frac{1}{(1-t^2)^3}(2, -8, 4)
\end{aligned}$$

Entonces

$$B(t) = \frac{\lambda'(t) \times \lambda''(t)}{\|\lambda'(t) \times \lambda''(t)\|} = \frac{1}{2\sqrt{21}}(2, -8, 4) = \frac{1}{\sqrt{21}}(1, -4, 2)$$

Por lo tanto, la curva se encuentra en el plano

$$[(x, y, z) - \lambda(0)] \cdot B(t) = 0 \Longleftrightarrow (x - 1) - 4(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

Puntaje Pregunta 3.

- 3 puntos por calcular la torsión y concluir que la curva es plana.
- 3 puntos por obtener la ecuación del plano en que la curva está contenida.

4. Sea γ una curva plana parametrizada por longitud de arco con curvatura constante. Pruebe que la imagen de γ es una recta o una cincunferencia.

Solución. Si $\kappa \neq 0$ entonces

$$\frac{d}{ds}(\gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N(s)) = T(s) + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T(s)) = 0\,.$$

Luego, $\gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N(s)$ es constante, digamos igual a a. Entonces

$$\|\gamma(s) - a\| = \left\|\frac{1}{\kappa}N(s)\right\| = \frac{1}{\kappa}\|N(s)\| = \frac{1}{\kappa} = cte\,.$$

por lo tanto, γ está sobre una circunferencia de radio $r = 1/\kappa$ y centro en a.
Ahora bien, si $\kappa = 0$ entonces $T'(s) = \kappa N(s) = 0$ para todo s, luego el vector tangente es constante para todo s lo que implica que la curva γ está sobre una recta.

Puntaje Pregunta 4.

- 4 puntos por mostrar que si $\kappa \neq 0$ entonces la curva está sobre una circunferencia.
- 2 puntos por mostrar que si $\kappa = 0$ entonces la curva está sobre una recta.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2018

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 2

1. Dada la curva C parametrizada por $\lambda(t) = (tcos(t), tsen(t)),\ t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, encuentre el área de la superficie sobre C y bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   Solución. El área A está dada por

$$A = \int_{\lambda} z(x(t), y(t))ds = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} t\sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{3}(1+t^2)^{3/2}\Big|_0^{3\pi/2} = \frac{1}{3}\left[\left(1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por concluir que $A = \int_{\lambda} z(x(t), y(t))ds$
- 2 puntos por calcular $z(x(t), y(t)) \cdot \|\lambda'(t)\| = t \cdot \sqrt{1+t^2}$
- 2 puntos por calcular la integral $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} t\sqrt{1+t^2}\, dt$

2. *a*) Si $\overrightarrow{r} = (x, y)$ y $r = \|\overrightarrow{r}\|$, demuestre que para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ el campo $\overrightarrow{F} = f(r)\overrightarrow{r}$ es conservativo en toda región contenida en un abierto que no contiene el origen.

b) Sea $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (ye^{yz}cos(xy), ze^{yz}sen(xy) + xe^{yz}cos(xy), ye^{yz}sen(xy))$$

Encuentre $\displaystyle\int_\lambda \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda}$ si el punto final e inicial de λ son $(\pi, 1, 0)$ y $(\frac{\pi}{4}, 2, 1)$ respectivamente. Justifique.

Solución.

a) $\overrightarrow{F}(xf(r), yf(r))$. Se cumple que $\dfrac{\partial}{\partial x}(yf(r)) = yf'(r)\frac{x}{r} = xf'(r)\frac{y}{r} = \dfrac{\partial}{\partial y}(xf(r))$

Como el dominio no contiene el origen vemos que se satisfacen las condiciones del teorema que implican que $\overrightarrow{F}$ es conservativa.

Puntaje Pregunta 2a).

- 2 puntos por verificar que $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$.
- 1 punto por concluir que el campo es conservativo.

b) Buscamos f tal que $\overrightarrow{F} = \nabla f$.

Como $\dfrac{\partial}{\partial x}f$ debe ser igual a $ye^{yz}cos(xy)$, $f(x, y, z) = e^{yz}sen(xy) + g(y, z)$. Por lo tanto $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x, y, z) = ze^{yz}sen(xy) + xe^{yz}cos(xy) + \dfrac{\partial}{\partial y}g(y, z) = ze^{yz}sen(xy) + xe^{yz}cos(xy)$. Luego $g(y, z)$ no depende de y, es decir $f(x, y, z) = e^{yz}sen(xy) + h(z)$, entonces $\dfrac{\partial}{\partial z}f(x, y, z) = ye^{yz}sen(xy) + h'(z) = ye^{yz}sen(xy)$. Vemos que $\overrightarrow{F} = \nabla(e^{yz}sen(xy))$

Por el teorema fundamental para integrales de linea

$$\int_\lambda \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda} = f(\pi, 1, 0) - f\left(\frac{\pi}{4}, 2, 1\right) = -e^2$$

Puntaje Pregunta 2b).

- 2 puntos por determinar la función potencial f.
- 1 punto por calcular la integral de línea.

3. Calcular el trabajo producido por el campo de fuerzas dada por $\overrightarrow{F} = (8x + z, 2xz^2, -4y^2)$, a lo largo de la curva definida por las ecuaciones $z = 9 - 2x^2 - 4y^2$, $z = 1$. La curva está recorrida de modo que reflejada en el plano xy tiene orientación positiva.

Solución. La curva contenida en el plano $z = 1$, es la elipse $2x^2 + 4y^2 = 8 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ la cual podemos parametrizar por $\gamma(t) = (2\cos(t), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), 1)$, $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}(\gamma(t)) &= (16\cos(t) + 1, 4\cos(t), -8\,\mathrm{sen}^2(t)) \\ \gamma'(t) &= (-2\,\mathrm{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t), 0) \\ \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= -32\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) - 2\,\mathrm{sen}(t) + 4\sqrt{2}\cos^2(t) \end{aligned}$$

Entonces, el trabajo producido por el campo de fuerza $\overrightarrow{F}$ es

$$\begin{aligned} W &= \int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-32\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) - 2\,\mathrm{sen}(t) + 4\sqrt{2}\cos^2(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-16\,\mathrm{sen}(2t) - 2\,\mathrm{sen}(t) + 4\sqrt{2}\left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right)\right) dt \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{2}(2\pi) = 4\sqrt{2}\pi\,. \end{aligned}$$

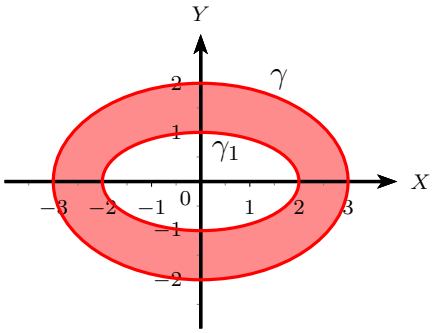
Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por parametrizar la curva incluido el intervalo en donde está definida.
- 2 puntos por calcular $\overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.
- 2 puntos por calcular la integral de línea.

4. Calcule usando el Teorema de Green $\iint_D (x-1)\,dxdy$, donde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x^2}{4} + y^2 \geqslant 1\,,\ \tfrac{x^2}{9} + \tfrac{y^2}{4} \leqslant 1\right\}\,.$$

Solución. Geometricamente la región D se aprecia en la siguiente figura



Sean

$$\gamma\ :\quad \begin{cases} x(t) &= 3\cos(t) \\ y(y) &= 2\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}\,,\qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_1\ :\quad \begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) \\ y(y) &= \mathrm{sen}(t) \end{cases}\,,\qquad t \in [0, 2\pi]$$

Usando el Teorema de Green, se tiene que

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Se sigue que $x - 1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$, entonces podemos elegir $F = (P, Q) = \left(y, \dfrac{x^2}{2}\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\iint_D (x-1)\,dxdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_\gamma Pdx + Qdy - \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy \\
&= \int_\gamma ydx + \frac{x^2}{2}dy - \int_{\gamma_1} ydx + \frac{x^2}{2}dy \\
&= \int_0^{2\pi} 2\,\mathrm{sen}(t)(-3\,\mathrm{sen}(t)) + \frac{9}{2}\cos^2(t)(2\cos(t))\,dt \\
&\qquad - \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(t)(-2\,\mathrm{sen}(t)) + \frac{1}{2}(4\cos^2(t))\cos(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-6\,\mathrm{sen}^2(t) + 9\cos(t)(1 - \mathrm{sen}^2(t))\,dt \\
&\qquad - \int_0^{2\pi} (-2\,\mathrm{sen}^2(t) + 2\cos(t)(1 - \mathrm{sen}^2(t))\,dt = -6\pi - (-2\pi) = -4\pi\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 4.

- 1 puntos por paramatrizar las curvas γ y γ_1.
- 1 puntos por utilizar el teorema de Green.
- 1 punto por elegir un campo de vectores $F = (P, Q)$ que cumpla con $Q_x - P_y = x - 1$.
- 3 puntos por calcular las integrales de línea.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2018

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 3

1. Sea $\boldsymbol{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Si $\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^p}$, determine el o los valores de p para los cuales div $\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = 0$.

   Solución.

$$\text{div } F = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\|\mathbf{r}\|^p} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\|\mathbf{r}\|^p} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\|\mathbf{r}\|^p} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\frac{\mathrm{x}}{\|\mathbf{r}\|^{\mathrm{p}}} = \frac{\|\mathbf{r}\|^{\mathrm{p}} - \mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\|\mathbf{r}\|^{\mathrm{p}}}{\|\mathbf{r}\|^{2\mathrm{p}}}$$

   Se tiene que $\dfrac{\partial}{\partial\, x}\|\mathbf{r}\| = \dfrac{\mathbf{r}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$

   Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial\, x}\frac{x}{\|\mathbf{r}\|^p} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^p} - \frac{px^2}{\|\mathbf{r}\|^{p+2}}$$

   Análogamente

$$\frac{\partial}{\partial\, y}\frac{y}{\|\mathbf{r}\|^p} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^p} - \frac{py^2}{\|\mathbf{r}\|^{p+2}} \qquad \frac{\partial}{\partial\, z}\frac{z}{\|\mathbf{r}\|^p} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^p} - \frac{pz^2}{\|\mathbf{r}\|^{p+2}}$$

   Entonces div $F = \dfrac{3-p}{\|\mathbf{r}\|^p}$, luego div $F = 0$ solo si $p = 3$

Puntaje Pregunta 1.

- Sabe lo que es la divergencia **1 punto**
- Calcula correctamente las derivadas parciales **2 puntos**(puede calcular 1 y por analogía obtener las otras)
- Calcula correctamente la divergencia **2 puntos**
- Determina que para $p = 3,$ div $F = 0$ **1 punto**

2. Encontrar la coordenada $\overline{y}$ del centro de masa de una lámina que tiene la forma del cono $y^2 = x^2 + z^2$ entre los planos $y = 1$ e $y = 4$, si su densidad de masa es proporcional a la distancia al eje y.

   Solución. La superficie está parametrizada por $\phi(\theta, y) = (y\cos(\theta),\ y,\ y\,\mathrm{sen}(\theta))$

$$\frac{\partial\,\phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\,\phi}{\partial y} = -(y\cos(\theta),\ y,\ y\,\mathrm{sen}(\theta))$$

   La masa M está dada por

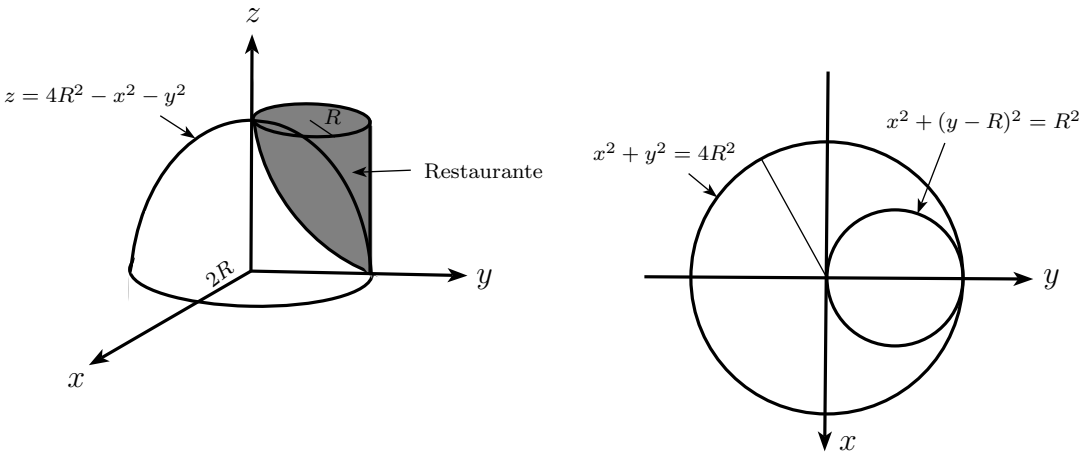
$$M = \iint_S ky dS = \int_1^4 \int_0^{2\pi} ky\sqrt{2y^2}dy\ d\theta = 42\sqrt{2}k\pi$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M}\iint_S ky^2\ dS = \frac{1}{M}\int_1^4 \int_0^{2\pi} ky^3\sqrt{2}dy\ d\theta = \frac{85}{28}$$

Puntaje Pregunta 2.

- Parametriza correctamente la superficie **2 puntos**
- Calcula correctamente M **2 puntos**
- Calcula correctamente $\overline{y}$ **2 puntos**

3. Están construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. Los planos del arquitecto se muestran en la figura



Durante un típico día de verano los alrededores del restaurante están sujetos a un campo de temperatura dado por

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2 \, .$$

Una densidad de flujo de calor $V = -k\nabla T$ (k es una constante que depende del grado de aislamiento a usarse) a través de todos los lados del restaurante (incluyendo el techo y sin incluir el contacto con la ladera) produce un flujo de calor. ¿Cuál es el flujo total de calor hacia afuera?

Solución. El flujo F estạdo por

$$F = \iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

con $\mathbf{V} = -k(6x, 2(y - R), 32z)$, S_1 el techo y S_2 la superficie parametrizada por

$$\phi(\theta, z) = (R\cos(\theta), R + R\,\mathrm{sen}(\theta), z) \qquad 0 \leqslant \theta \leq 2\pi, \quad 2R^2(1 - \mathrm{sen}(\theta)) \leq z \leq (2R)^2$$

con esta parametrización se obtiene la orientación pedida.
El techo del restaurante está altura $z = 4R^2$ entonces

$$\iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \, d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \hat{k} dS = -k \iint_{S_1} 128 \cdot R^2 \, dS = -128kR^2(\pi R^2) = -128k\pi R^4 \, .$$

Ahora bien, el flujo del restaurante en la parte cilindrica es

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_{2R^2(1-\text{sen}(\theta))}^{(2R)^2} -k(6R\cos(\theta), 2R\,\text{sen}(\theta), 32z) \cdot (\phi_\theta \times \phi_z)\, dzd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{2R^2(1-\text{sen}(\theta))}^{(2R)^2} -k(6R\cos(\theta), 2R\,\text{sen}(\theta), 32z) \cdot (R\cos(\theta), R\,\text{sen}(\theta), 0) dzd\theta \\
&= -k\int_0^{2\pi} (6R^2\cos^2\theta + 2R^2\,\text{sen}^2\,\theta)(4R^2 - 2R^2(1-\text{sen}\,\theta))d\theta \\
&= -k\int_0^{2\pi} (6R^2\cos^2\theta + 2R^2\,\text{sen}^2\,\theta)(2R^2 + 2R^2\,\text{sen}\,\theta)d\theta \\
&= -k\int_0^{2\pi} (12R^4\cos^2\theta + 4R^4\,\text{sen}^2\,\theta + 12R^4\cos^2\text{sen}\,\theta + 4R^4\,\text{sen}\,\theta(1-\cos^2\theta))d\theta \\
&= -16k\pi R^4
\end{aligned}$$

Por lo tanto $F = -144k\pi R^4$.

Puntaje Pregunta 3.

- Sabe tranformar una integral de superficie en una integral doble **1 punto**
- Calcula correctamente el flujo a traves de S_1 **2 puntos**(-1 punto si la orientación no corresponde)
- Parametriza correctamente S_2 con la orientación pedida **1 punto**
- Calcula correctamente $(\phi_\theta \times \phi_z)$ **1 punto**
- Calcula correctamente el flujo a traves de S_2 **1 punto**

4. Sea $\mathcal{S}$ la parte del plano $z = 4 + x + y$ que se ubica dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

   a) Calcule $\iint_S f(x, y, z)\, dS$, donde $f(x, y, z) = x^2 z + y^2 z$.

   b) Calcule $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, donde $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, donde la superficie $\mathcal{S}$ tiene orientación hacia arriba.

Solución. Una parametrización de S es

$$\phi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), 4 + r\cos(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\theta)) \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2.$$

El vector normal a S con la orientación pedida es $(-1, -1, 1)$

$$\frac{\partial\,\phi}{\partial\, r} \times \frac{\partial\,\phi}{\partial\,\theta} = (-r, -r, r)$$

a)

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2(4 + r\cos(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\theta))\sqrt{3}r\; d\theta dr = 2\pi \int_0^2 4\sqrt{3}r^3\; dr = 32\sqrt{3}\pi\,.$$

b)

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2\cos^2(\theta), r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta), 4 + r\cos(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\theta)) \cdot (-r, -r, r)\; d\theta\, d\, r \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-r^3\cos^2\theta - r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 4r + r^2\cos\theta + r^2\,\mathrm{sen}\,\theta) d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^2 \left(-\frac{r^3}{2} + 4r\right) dr = 12\pi
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 4.

- Parametriza correctamente S con la orientación pedida **2 puntos**
- Calcula correctamente la primera integral **2 puntos**
- Calcula correctamente la segunda integral **2 puntos**

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2018

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 4

1. Use el teorema de Stokes para calcular

$$\int_C xdx + yz^2dy + xzdz$$

donde C es la intersección de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = y$.

Solución. Usando el teorema de Stokes

$$\int_C xdx + yz^2dy + xzdz = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot dS$$

donde S es la región de la superficie de la semiesfera cuya frontera es la curva C.
Una parametrización de S viene dada por

$$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, \sqrt{1-r^2})\,, \quad 0 \leqslant r \leqslant \text{sen}\,\theta\,, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,.$$

El vector normal a la suoerficie es

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{1-r^2}}, r\right)\,.$$

El rotor del campo es $\text{rot}(\vec{F}) = (-2yz, -z, 0)$ y entonces se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_C xdx + yz^2dy + xzdz &= \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot dS = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\,\theta} (-2r^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - r^2\,\text{sen}\,\theta)\,drd\theta \\
&= -\int_0^\pi \left[\frac{r^4}{2}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \frac{r^3}{3}\,\text{sen}\,\theta\right]_0^{\text{sen}\,\theta} d\theta = -\int_0^\pi \left[\frac{\text{sen}^5\,\theta}{2}\cos\theta + \frac{\text{sen}^4\,\theta}{3}\right] d\theta \\
&= -\left[\frac{\text{sen}^6\,\theta}{12}\right]_0^\pi - \frac{1}{3}\int_0^\pi \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos(2\theta) + \frac{\cos(4\theta)}{2}\right) d\theta = -\frac{\pi}{8}\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por usar correctamente el teorema de Stokes.
- 2 puntos por parametrizar la superficie incluido su dominio.
- 2 puntos por calcular la integral doble.

2. Sea $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^3+3} + \dfrac{3x^3}{2\sqrt{x^3+3}} + 5x^4yz, x^5z, x^5y\right)$.

Calcule $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda}$ siendo C la hélice parametrizada mediante $\lambda(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. Cerramos la curva C uniendo el punto inicial con el punto final mediante la curva $\mu(t) = (1-t)\lambda(0) + t\lambda(1) = (1-t)(1,0,0) + t(1,0,2\pi) = (1,0,2\pi t)$, $t \in [0,1]$.
Sea $S = S_1 \cup S_2$ la superficie cuyo borde son las curvas $C \cup \mu$ donde S_1 es la superficie cilindrica y la tapa $S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0\}$. Entonces, por el teorema de Stokes

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\lambda} + \int_{-\mu} \vec{F} \cdot d\vec{\mu} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot dS\,.$$

Como $\operatorname{rot}(\vec{F}) = (0,0,0)$ se sigue que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\lambda} = -\int_{-\mu} \vec{F} \cdot d\vec{\mu} = \int_{\mu} \vec{F} \cdot d\vec{\mu} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\mu(t)) \cdot \mu'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{3}{4}, 2\pi t, 0\right) \cdot (0,0,2\pi)\, dt = 0\,.$$

Puntaje Pregunta 2.

- 1,5 puntos por cerrar la curva y determinar una parametrización para la curva μ.
- 1,5 puntos por usar el teorema de Stokes.
- 1,5 puntos por calcular la integral doble usando que $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$.
- 1,5 puntos por calcular la integral de línea sobre μ.

3. Calcular el flujo de $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (e^{z^2} + x^2 - y, xy + \sqrt{1 - \text{sen}(z)}, x + zy^2)$ a través de la superficie S dada por la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ sobre el plano $Z = 0$ con sus normales apuntando hacia arriba.

Solución. Sea $D = \{(x,y,0) \ : \ x^2 + y^2 = 9\}$ y sea $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ 0 \leq z \leq 9, \ x^2 + y^2 \leq 9 - z\}$, entonces $K \cup D$ es la frontera de Ω.

Entonces $f(r,\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta), (3-r)^2), \ 0 \leq r \leq 3, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $g(r,\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta), 0)$, $0 \leq r \leq 3, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ parametrizan K y D respectivamente.

$$N_f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos(\theta) & sen(\theta) & 2r-6 \\ -rsen(\theta) & rcos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = (-r(2r-6)cos(\theta), -r(2r-6)sen(\theta), r)$$

$$N_g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -rsen(\theta) & rcos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)$$

por lo tanto N_f apunta hacia el exterior de Ω y N_g hacia el interior.

Por el teorema de la divergencia se tiene que

$$\iiint_{\Omega} div(\overrightarrow{F}) dx \, dy \, dz = \iint_{K} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} - \iint_{C} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A}$$

Usando coordenadas cilíndricas, como $div(\overrightarrow{f}) = 3x + y^2$, nos queda

$$\begin{aligned} \iint_{K} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} &= \int_0^{2\pi} \int_0^9 \int_0^{\sqrt{9-z}} r(3rcos(\theta) + r^2 \,\text{sen}^2(\theta)) dr \, dz \, d\theta + \iint_{C} \overrightarrow{F}(g) \cdot N_g d\, A \\ &= \left[\int_0^{2\pi} cos(\theta) \, d\theta\right] \left[\int_0^9 \int_0^{\sqrt{9-z}} 3r^2 dr \, dz\right] + \left[\int_0^{2\pi} sen^2(\theta) \, d\theta\right] \left[\int_0^9 \int_0^{\sqrt{9-z}} r^3 dr \, dz\right] \\ &\quad + \left[\int_0^{2\pi} cos(\theta) \, d\theta\right] \left[\int_0^3 r^2 \, dr\right] \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^9 (9-z)^2 \, dz = \frac{243}{4}\pi \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 3.

- 1,5 puntos por cerrar la superficie para que sea cerrada y parametrizar la tapa.
- 1,5 puntos por parametrizar la superficie K.
- 1 puntos por utilizar (correctamente) el teorema de la divergencia.
- 2 puntos por calcular la integral triple.

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un sólido acotado tal que el punto $(0,0,0)$ no está en la frontera de Ω. Demuestre que

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot dS = \begin{cases} 4\pi & \text{si } 0 \in \Omega \\ 0 & \text{si } 0 \notin \Omega \end{cases}$$

Solución. Sean $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ y $\|\boldsymbol{r}\| = \|r(x,y,z)\| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$.

Si $(0,0,0) \notin \partial\Omega$, entonces el campo vectorial es de clase C^1 en Ω y en virtud del teorema de la divergencia

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3}\right) dV$$

Como $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}/\|r\|^3) = 0$ para $\boldsymbol{r} \neq 0$, se obtiene que

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = 0\,.$$

Ahora bien, si $(0,0,0) \in \partial\Omega$ y $(0,0,0) \notin \partial\Omega$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola B de radio ε con centro en $(0,0,0)$ está completamente contenida en Ω. Sea S la región entre Ω y B. Entonces, S tiene frontera $\partial B \cup \partial\Omega = \partial S$. La orientación en ∂B inducida por la normal exterior en S es opuesta a la obtenida a partir de B. Ahora $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}/\|r\|^3) = 0$ en S, de modo que por el teorema de la divergencia,

$$\iint_{\partial S} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = \iiint_{S} \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3}\right) dV = 0\,.$$

Como

$$\iint_{\partial S} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = \iint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS + \iint_{\partial B} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS$$

tenemos

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = -\iint_{\partial B} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS$$

Ahora bien, en ∂B, $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}/\|r\|$ y $\|\boldsymbol{r}\| = \varepsilon$, pues ∂B es una esfera de radio ε, de modo que

$$-\iint_{\partial B} \frac{\boldsymbol{r}}{\|r\|^3} \cdot dS = \iint_{\partial B} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon^2}(4\pi\varepsilon^2) = 4\pi\,.$$

Puntaje Pregunta 4.

- 1 punto por verificar que $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}/\|r\|^3) = 0$.
- 2 puntos mostrar que la integral da cero cuando $(0,0,0) \notin \Omega$.
- 3 puntos por mostrar que la integral de superficie es 4π cuando $(0,0,0) \in \Omega$.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2019

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 1

1. Considere la curva intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 = 2x \qquad \text{e} \qquad z^2 = x^2 + y^2$$

con $z \geqslant 0$. Hallar una parametrización de la curva y la ecuación del plano osculador en el punto $P(1, 1, \sqrt{2})$.

Solución. Completando cuadrado en la primera ecuación vemos que

$$x^2 + y^2 = 2x \Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Luego, podemos elegir funciones coordenadas $x(t) = 1 + \cos(t)$, $y(t) = \operatorname{sen}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Como $z \geqslant 0$ se obtiene que $z(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1 + \cos(t))^2 + \operatorname{sen}^2(t)} = \sqrt{2 + 2\cos(t)}$.
Una parametrización para la curva es $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (1 + \cos(t), \operatorname{sen}(t), \sqrt{2 + 2\cos(t)}) \, .$$

Por otro lado, cuando $t = \pi/2$ se obtiene el punto $P(1, 1, \sqrt{2})$. El vector $\vec{n} = \alpha'(\pi/2) \times \alpha''(\pi/2)$ es paralelo al vector binormal de la curva, ya que $B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), \frac{-\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2 + 2\cos(t)}} \right) \\
\alpha''(t) &= \left(-\cos(t), -\operatorname{sen}(t), \frac{-2\cos(t) - 2\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)}{(2 + 2\cos(t))^{3/2}} \right) \\
\left.\begin{aligned} \alpha'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \left(-1, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \alpha''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \left(0, -1, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}\right\} &\Longrightarrow \vec{n} = \alpha'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \times \alpha''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}, 1\right)
\end{aligned}$$

Entonces, la ecuación del plano osculador en el punto $P(1, 1, \sqrt{2})$ es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1) + (z - \sqrt{2}) = 0 \Longleftrightarrow 2(x-1) + (y-1) + 2\sqrt{2}(z - \sqrt{2}) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{2x + y + 2\sqrt{2}z = 7}.$$

Puntaje Pregunta 1.

- 1 punto por obtener la función coordenada $x(t)$.
- 1 punto por obtener la función coordenada $y(t)$.
- 1 punto por obtener la función coordenada $z(t)$.
- 1 punto por obtener el intervalo del parámetro t.
- 1 punto por obtener un vector normal al plano osculador (puede ser cualquier múltiplo de $\vec{n}$).
- 1 punto por obtener la ecuación del plano.

2. Parametrice por longitud de arco la curva polar $r = 1 + \cos\theta$, con parámetro $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Solución. Tenemos que

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1+\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 2 + 2\cos\theta = 4\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) .$$

Entonces, la función longitud de arco de la curva polar es

$$s(t) \;=\; \int_{-\pi}^{t} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 2\int_{-\pi}^{t} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\, d\theta = 2\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_{-\pi}^{t} = 4\left[\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + 1\right] .$$

Notemos que

$$r = s(t) \Longleftrightarrow r = 4\left[\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + 1\right] \Longleftrightarrow \frac{r}{4} - 1 = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \Longleftrightarrow t = 2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{r-4}{4}\right) .$$

Entonces, la función inversa de la función longitud de arco es $\varphi(s) = 2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{s-4}{4}\right)$. Se sigue que, la parametrización por longitud de arco de la curva polar es

$$\alpha(s) = (f(\varphi(s))\cos\varphi(s), f(\varphi(s))\operatorname{sen}\varphi(s)) ,$$

donde $f(\theta) = 1 + \cos\theta$.

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por obtener el valor de $r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$.
- 2 puntos por obtener la función longitud de arco $s(t)$.
- 2 puntos por obtener la función inversa de la función longitud de arco $\varphi(s)$.

3. Demostrar que la curva de ecuación paramétrica

$$x = 3t^2 + 2t + 1\,, \qquad y = t^2 - 2t + 3\,, \quad z = 5t^2 - t - 2$$

es plana y encuentre la ecuación del plano que la contiene.

Solución. Para probar que la curva es plana, basta probar que la torsión de la curva es cero para todo t. Tomando $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (6t + 2, 2t - 2, 10t - 1) \\ \alpha''(t) &= (6, 2, 10) \\ \alpha'''(t) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Es sencillo ver que $(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t) = 0$ entonces $\tau(t) = \dfrac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = 0$ para todo t y luego la curva es plana. Además, como la curva es plana está contenida en el plano osculador y se tiene que el vector

$$\vec{n} = \alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6t + 2 & 2t - 2 & 10t - 1 \\ 6 & 2 & 10 \end{vmatrix} = (-18, -26, 16)\,.$$

es perpendicular al plano osculador. Entonces, la ecuación del plano en donde la curva está contenida tiene vector normal $\vec{n}$ y pasa por el punto $\alpha(0) = (1, 3, -2)$ es

$$-18(x - 1) - 26(y - 3) + 16(z + 2) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{9x + 13y - 8z = 61}$$

Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por calcular la torsión de la curva y obtener que $\tau(t) = 0$ para todo t.
- 2 puntos por obtener un vector normal al plano osculador (puede ser cualquier múltiplo de $\vec{n}$).
- 2 puntos por obtener la ecuación del plano en donde está contenida la curva.

4. Un automovilista se desplaza por una carretera recta. En el instante $t = 0$ llega a una rotonda la que recorre con una trayectoria

$$\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t(2-t)) \,, \qquad t \in [0,2]$$

En el instante $t = 2$ sale de la rotonda y vuelve a continuar por una carretera recta.

a) Calcule la curvatura máxima de la rotonda para $t \in [0,2]$, ¿en qué punto ocurre?

b) Determine la torsión de la rotonda para $t \in [0,2]$. Haga un gráfico de la torsión en función del tiempo.

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2-2t) \\
\alpha''(t) &= (-\cos t, -\operatorname{sen} t, -2) \\
\alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (-2\cos t - (2-2t)(-\operatorname{sen} t), -(2\operatorname{sen} t + (2-2t)\cos t), \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) \\
&= (-2\cos t + 2\operatorname{sen} t - 2t \operatorname{sen} t, -2\operatorname{sen} t - 2\cos t + 2t\cos t, 1) \\
\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2 &= 4\cos^2 + 4\operatorname{sen}^2 t + 4t^2 \operatorname{sen}^2 t - 8\operatorname{sen} t \cos t + 8t \operatorname{sen} t \cos t - 8t \operatorname{sen}^2 t \\
&\qquad + 4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 4t^2 \cos^2 t + 8\operatorname{sen} t \cos t - 8t \operatorname{sen} t \cos t - 8t\cos^2 t + 1 \\
&= 9 - 8t + 4t^2 \\
\|\alpha'(t)\|^2 &= \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + (2-2t)^2 = 5 - 8t + 4t^2
\end{aligned}$$

Entonces, la curvatura de la curva para $t \in [0,2]$ es

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{9-8t+4t^2}}{(5-8t+4t^2)^{3/2}} \,.$$

Sea $p = p(t) = 9 - 8t + 4t^2$ y $q = q(t) = 5 - 8t + 4t^2$. Entonces, $\kappa(t) = p^{1/2} q^{-3/2}$ y la derivada de la función curvatura es

$$\kappa'(t) = \frac{1}{2} p^{-1/2}(-8+8t) q^{-3/2} - \frac{3}{2} p^{1/2} q^{-5/2}(-8+8t) = 4(-1+t)[p^{1/2} q^{-3/2} - 3p^{1/2} q^{-5/2}] \,.$$

Luego $t = 1$ es punto crítico de κ que es un máximo global y se alcanza en el punto $\alpha(1) = (\cos(1), \operatorname{sen}(t), 1)$.

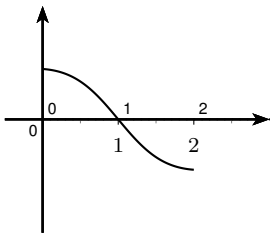
b) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha'''(t) &= (\operatorname{sen} t, -\cos t, 0) \\
(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t) &= \operatorname{sen} t(-2\cos t + 2\operatorname{sen} t - 2t \operatorname{sen} t) - \cos t(-2\operatorname{sen} t - 2\cos t + 2t\cos t) \\
&= -2\operatorname{sen} t \cos t + 2\operatorname{sen}^2 t - 2t \operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t + 2\cos^2 t - 2t\cos^2 t \\
&= 2 - 2t
\end{aligned}$$

Entonces, la torsión de la curva para $t \in [0,2]$ es

$$\tau(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{2-2t}{9-8t+4t^2} \,.$$

A continuación se aprecia el gráfico de la función τ



Puntaje Pregunta 4.

- 2 puntos por obtener la curvatura de la curva.
- 1 punto por obtener que en $t = 1$ hay un máximo para la curva.
- 2 puntos por obtener la torsión de la curva.
- 1 punto por obtener la gráfica de la torsión en el intervalo $[0, 2]$.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemticas
Temporada Acadmica de Verano 2019

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 1

1. Considere el campo vectorial

$$F(x,y) = (\frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2})$$

a) Calcular

$$\int_{C_1} F \cdot dr$$

donde C_1 es la curva $r(t) = (\cos t + 1, \sin t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

Solución:
C_1 es

$$r(t) = (\cos t + 1, \sin t)$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$. Luego $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$ y $F(r(t)) = (\operatorname{sen} t, -\cos t)$

Se tiene entonces que

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

b) Calcular

$$\int_{C_2} F \cdot dr$$

donde $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + y^2 = 4\}$
Solución:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}$$

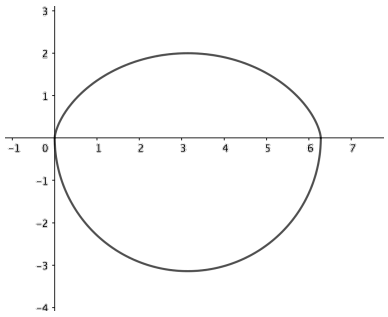
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}$$

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ y C_2 es una curva cerrada contenida en una regíon simplemente conexa, se concluye que F es conservativo en esa región y por lo tanto $\displaystyle\int_{C_2} F \cdot dr = 0$.

2. *a*) Encuentre el área encerrada por un arco de cicloide, parametrizado como

$$r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

con $t \in [0, 2\pi]$ y la mitad inferior de la circunferencia de radio π y centrada en $(\pi, 0)$.



Solución:

Si tomamos el campo vectorial $F = (-y, 0)$, entonces el área pedida queda determinada por

$$\int_{-C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr$$

Donde C_1 es el arco de cicloide dada (parametrización negativa), y C_2 mitad inferior de la circunferencia de radio π y centrada en $(\pi, 0)$, $s(t) = (\pi \cos t + \pi, \pi \sin t)$ (parametrizacion positiva).

$$-\int_{C_1} F \cdot dr = -\int_0^{2\pi} (-1 + \cos t, 0) \cdot (1 - \cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t dt = 3\pi$$

$$\int_{C_2} F \cdot dr = \int_{\pi}^{2\pi} (-\pi \sin t, 0) \cdot (-\pi \sin t, \pi \cos t) dt = \pi^2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi^3}{2}$$

Por lo que el área es $3\pi + \dfrac{\pi^2}{2}$.

Nota: Se podría haber calculado el área bajo la cicloide y sobre el eje x y luego haberle sumado el área de la semicircunferencia. Es decir

$$-\int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr + \frac{\pi^3}{2}$$

con C_3 el trazo que va desde $(0,0)$ a $(2\pi,0)$.

b) Entregue un parametrización de la superficie que se genera al rotar un arco de cicloide, $r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$, en torno al eje x.
Solución:

$$x(t) = t - \sin(t)$$

$$y(t) = (1 - \cos(t)) \cos\theta$$

$$z(t) = (1 - \cos(t)) \operatorname{sen}\theta$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$

3. La base de una cerca está dada por la ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = 2t$ con $0 \leq t \leq 1$ metros. La altura de la cerca en la posición (x, y) está dada por la funcion $h(x, y) = 100xy$ metros.

   a) Suponga que 1 litro de pintura cubre 100 m^2. Demuestre que la cantidad de litros de pintura que se necesita para pintar la cerca por ambos lados es

   $$4\int_0^1 t^3\sqrt{4t^2+4}dt$$

   Solución:

   Hay que calcular el área A de la acerca y luego multiplicarlo por dos (ambos lados). La cantidad de pintura requerida será entonces $\dfrac{2 \cdot A}{100}$ litros.
   Se tiene que

   $$A = \int_C h(x,y)ds$$

   con C la curva $r(t) = (t^2, 2t)$, $0 \leq t \leq 1$

   Luego $A = \displaystyle\int_C h(x,y)ds = \int_0^1 h(r(t))||r'(t)||dt = 200\int_0^1 t^3\sqrt{4t^2+4}dt.$
   y por lo tanto se necesitan $4\displaystyle\int_0^1 t^3\sqrt{4t^2+4}dt$ litros de pintura.

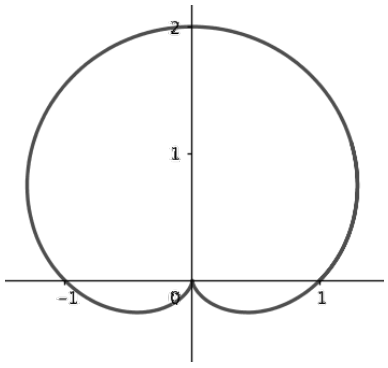
b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $r(x, y) = (x, y, 100xy)$ en el punto $(1, 2, 200)$.
Solución:

Se tiene que la superficie es $r(x, y) = (x, y, 100xy)$. Por lo $r_x = (1, 0, 100y)$ y $r_y = (0, 1, 100x)$.

Un vector normal al plano tangente en $(1, 2, 200)$ es $r_x(1, 2, 200) \times r_y(1, 2, 200) = (-200, -100, 1)$
Por lo que la ecuación del plano tangente es

$$-200(x - 1) - 100(y - 2) + z - 1 = 0$$

4. El área de la región encerrada por la parte superior de la Cardioides que muestra el dibujo y el eje x es $\frac{3\pi}{2}+4$. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerza $F = (1-\frac{y}{x^2+y^2}, x+\frac{x}{x^2+y^2})$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parte superior de la Cardiodes desde $(1, 0)$ hasta $(-1, 0)$.



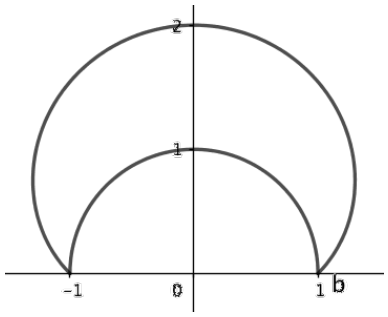
Solución:

Se pide $\int_C F \cdot dr$ con C la parte superior de la Cardioides de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.

Notemos que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1$. Luego es conveniente usar el teorema de Green. Para esto necesitamos cerrar la curva adecuadamente.

Lo naturar sería tomar el trazo de recta que va desde $(1, 0)$ a $(-1, 0)$, pero cuidado!, que el campo no esta definido en $(0, 0)$.

Por lo que se tomará la semicircunferencia, C', centrada en cero de radio 1, $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$



Por lo que

$$\int_C F \cdot dr + \int_{-C'} F \cdot dr = \int\int_D dA = A$$

De donde A es el área encerrada por las curvas, es decir $A = \dfrac{3\pi}{2} + 4 - \dfrac{\pi}{2} = \pi + 4$.

$$\int_{-C'} F \cdot dr = -\int_0^{\pi} -\sin t + \sin^2 t + 2\cos^2 t dt = -3\pi$$

Finalmente se tiene que

$$\int_C F \cdot dr = A - \int_{C'} F \cdot dr = 4\pi + 4.$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemticas
Temporada Acadmica de Verano 2019

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 3

1. Determine la masa de un embudo delgado con forma de cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 4$, si su función densidad es $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

   Solución:

   La masa es $\int\int_S \rho(x, y, z)ds$ donde S es la parte del cono $r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ con $(x, y) \in D$, $D = \{(x, y)|1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4\}$.

   Se tiene que $r_x \times r_y = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) \times (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) = (\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$

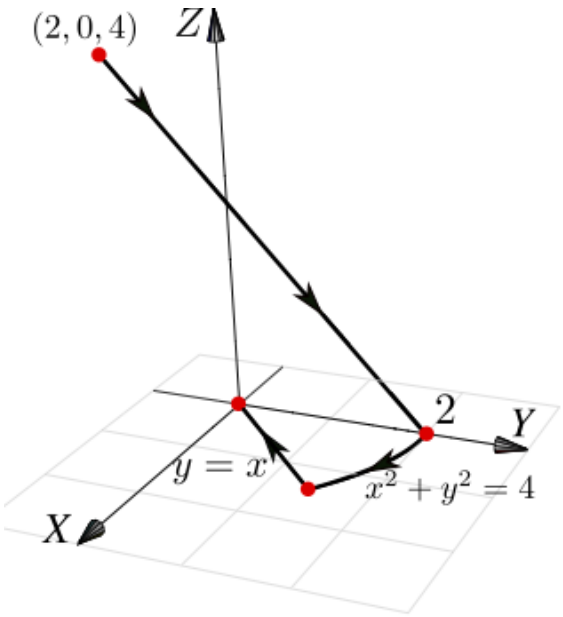
   $||r_x \times r_y|| = \sqrt{2}$

   Luego

   $\int\int_S \rho(x, y, z)ds = \int\int_D \rho(r(x, y))||r_x \times r_y||dA =$

   $\int\int_D (10 - \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{2}dA = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 (10 - r)rdrd\theta = 180\sqrt{2}\pi.$

2. Considere el campo de vectores $F(x,y,z) = 4xe^z\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(y)\,\hat{\mathbf{j}} + 2x^2e^z\,\hat{\mathbf{k}}$.
Sea C la curva de la figura de abajo. Calcule $\int_C F \cdot dr$.



Solución:

F es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^3$ que es un abierto conexo. Además rot $(F) = \vec{0}$, entonces el campo F es conservativo y luego es independiente de la trayectoria. Buscamos la función potencial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$, es decir

$$f_x = 4xe^z \Rightarrow f(x,y,z) = \int 4e^z\,dx = 2x^2e^z + K_1(y,z)$$

$$f_y = \cos(y) \Rightarrow f(x,y,z) = \int \cos(y)\,dy = \operatorname{sen}(y) + K_2(x,z)$$

$$f_z = 2x^2e^z \Rightarrow f(x,y,z) = \int 2x^2e^z\,dz = 2x^2e^z + K_3(x,y)$$

Usando el teorema fundamental de las integrales de lnea se sigue que

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(0,0,0) - f(2,0,4) = -8e^4\,.$$

3. Calcular $\int\int_S rotF \cdot dS$, donde

$$F(x,y,z) = (e^{xy}, e^{xz}, x^2 z)$$

y S es la mitad del elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ que está a la derecha del plano xz, orientado en la dirección del eje y positivo.

Solución:

Usando el teorema de Stokes se tiene que
$\int\int_S rotF \cdot dS = \int_C F \cdot dr$ donde C es la curva curva borde del la semielipse dada. Es decir la curva $x^2 + z^2 = 1$ que podemos parametrizar como $r(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ (y así su orientación es positiva según la orientación indicada del elipsoide)

Por lo que se tiene que
$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt$
de donde $F(r(t)) = (1, e^{\cos t \sin t}, \cos^2 t \sin t)$ y $r'(t) = (-\sin t, 0, \cos t)$.
Por lo que $F(r(t)\cdot) r'(t) = -\sin t + \cos^3 t \sin t$
y luego
$\int_0^{2\pi} F(r(t)\cdot) r'(t) dt = \int_0^{2\pi} -\sin t + \cos^3 t \sin t dt = 0$

4. Use el teorema de la divergencia para demostrar que el volumen de un cubo de lado a es a^3.
Solución:

Si tomamos el campo vectorial $F = (x, 0, 0)$ ($divF = 1$) y si E es la regón sólida interior del cubo de lado a, se tendría que $\int\int\int_E divF dV$ es el volumen del cubo de lado a.

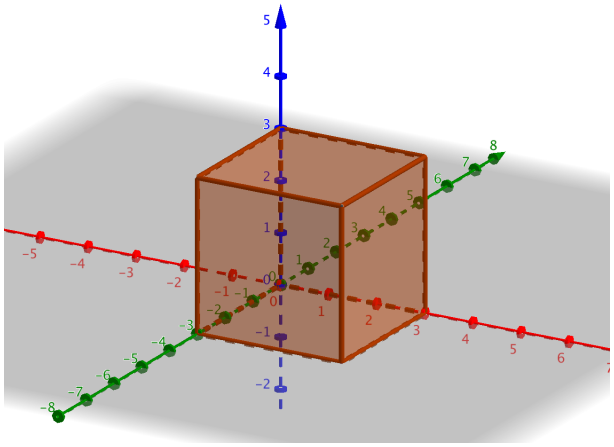
Usando el teorema de la divergencia tendríamos entonces que:
Volumen del cubo de lado a=$\int\int\int_E divF dV$=$\int\int_S F \cdot dS$ donde S es el cubo de lado a.

Tendríamos entonces que calcular

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int_{S_1} F \cdot dS + ... + \int\int_{S_6} F \cdot dS$$

donde S_i representa cada una de las 6 caras del cubo.

Si situamos el cubo en los ejes coordenadas como en el dibujo, nos damos cuenta que las 2 caras paralelas al plano yz tiene vector normal en la dirección del eje x (1,0,0) y estos serán las únicas caras con vector normal n tal que $F \cdot n \neq 0$ (los otros vectores normales son $(0,1,0)$ o $(0,0,1)$.)



Cara S_1: $r(y,z) = (a,y,z)$ con $0 \leq y \leq a$ y $0 \leq z \leq a$, $r_y \times r_z = (1,0,0)$

Cara S_2, $r(y,z) = (0,y,z)$ con $0 \leq y \leq a$ y $0 \leq z \leq a$, $r_y \times r_z = (1,0,0)$

Luego

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int_{S_1} F \cdot dS = \int_0^a \int_0^a a dA = a^3.$$