Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre de 2014

MAT1630 ⋆ Cálculo 3
Examen

1. Determine los mínimos y máximos locales y globales de la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

con $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución. Para $x^2 + y^2 < 1$ determinamos los mínimos y máximos de f a partir de $\nabla f(x,y) = 0$. En este caso

$$\nabla f(x,y) = (2x - 1, 2y - 1) \quad \textbf{(1 pto)}$$

luego, $(x,y) = \dfrac{1}{2}(1,1)$ es el único punto crítico de f en el disco abierto $x^2 + y^2 < 1$. Calculando la matriz Hessiana en el punto $(1/2, 1/2)$

$$H(1/2,1/2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Det}H(1/2,1/2) = 4 > 0 \quad \textbf{(1 pto)}$$

Por lo tanto $(x,y) = (1/2, 1/2)$ es un mínimo local.

Parametrizando la frontera del disco $x^2 + y^2 \leq 1$,

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

tendremos que f restringido a la frontera es:

$$g(t) = f(\cos(t), \mathrm{sen}(t)) = 2 - \cos(t) - \mathrm{sen}(t) \quad \textbf{(1 pto)}$$

Luego, los puntos crítico de g se obtienen resolviendo la ecuación $g'(t) = 0$, vale decir

$$g'(t) = \mathrm{sen}(t) - \cos(t) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tan(t) = 0$$

por lo tanto, para $t \in [0, 2\pi]$, los puntos críticos de g son $t = \pi/4, 5\pi/4$. Calculando $g''(t)$ tendremos

$$g''(t) = \cos(t) + \mathrm{sen}(t) \qquad \Rightarrow \qquad g''(\pi/4) = \sqrt{2}, \quad g''(5\pi/4) = -\sqrt{2}$$

De este modo, $t = \pi/4$ es mínimo local y $t = 5\pi/4$ es máximo local para g. Entonces $(\sqrt{2}/2)(1,1)$ es mínimo local de f y $-(\sqrt{2}/2)(1,1)$ es máximo local de f. **(1 pto)**

Por otro lado,

- $f(1/2, 1/2) = 1/2$

- $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 2 - \sqrt{2}$
- $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = 2 + \sqrt{2}$

De lo anterior se deduce que $(1/2, 1/2)$ es mínimo global **(1 pto)** y $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ es máximo global de f **(1 pto)**.

2. Calcular

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\, dxdy, \qquad a > 0$$

y deducir, justificadamente, el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx$

Solución. Haciendo el cambio de variables en coordenadas polares

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\, dxdy &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \rho e^{-a\rho^2}\, d\theta d\rho \\ &= \frac{\pi}{a}\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\, dxdy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}\, dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx\right)^2\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

3. Calcular $\displaystyle\int_S (\nabla \times F)\cdot \hat{n}\, dS$ donde $F(x, y, z) = (y, -x, zx^3y^2)$ y

$$S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + 3z^2 = 1,\ z \leq 0\}$$

Solución. A partir del teorema de Stokes

$$\int_S (\nabla \times F)\cdot \hat{n}\, dS = \int_{\partial S} F \cdot d\vec{r} = \int_T (\nabla \times F)\cdot \hat{n}\, dS$$

siendo $T = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Luego,

$$\nabla \times F = (2zx^3y, 3zx^2y^2, -2)$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_S (\nabla \times F)\cdot \hat{n}\, dS &= \int_T (-2)\, dS \\ &= -2\pi\end{aligned}$$

4. Calcular $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F\cdot\hat{n}\,dS$ donde $F(x,y,z)=(1,1,z(x^2+y^2)^2)$ y

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 1\}$$

Solución. Aplicando el teorema de la divergencia

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot\hat{n}\,dS=\int_{\Omega}\nabla F\,dV \quad (\textbf{1 pto})$$

donde $\nabla F(x,y,z)=(x^2+y^2)^2$ (**1 pto**). Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} F\cdot\hat{n}\,dS&=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^4\rho\,d\rho\,\theta\,dz \quad (\textbf{2 pto})\\ &=\frac{2\pi}{5} \quad (\textbf{2 pto})\end{aligned}$$

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa