Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2023

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 1

1. Considere la curva intersección de las superficies $y^2+z^2=4z$ e $y^2+4x=0$. Encuentre una parametrización para esta curva y halle la ecuación del plano osculador en el punto $P(-1,2,2)$.

   Solución. Completando cuadrado en la primera ecuación, vemos que

   $$y^2+z^2=4z \iff y^2+(z-2)^2=4 \iff \left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{z-2}{2}\right)^2=1$$

   Basta elegir las siguientes funciones coordenadas para la parametrización

   $$\begin{cases} \dfrac{y(t)}{2}=\cos(t) \\ \dfrac{z(t)-2}{2}=\operatorname{sen}(t) \end{cases} \iff \begin{cases} y(t)=2\cos(t) \\ z(t)=2+2\operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

   Como $y^2+4x=0$ entonces se sigue que

   $$x(t)=-\frac{1}{4}(y(t))^2=-\cos^2(t)\,.$$

   Una parametrización de esta curva intersección es:

   $$\alpha(t)=(-\cos^2(t),2\cos(t),2+2\operatorname{sen}(t))\,, \qquad t\in[0,2\pi]\,.$$

   El punto $P(-1,2,2)$ es parametrizado en el tiempo $t=0$, ya que $\alpha(0)=P$. Tenemos que

   $$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (2\cos(t)\operatorname{sen}(t),-2\operatorname{sen}(t),2\cos(t))=(\operatorname{sen}(2t),-2\operatorname{sen}(t),2\cos(t)) \\ \alpha''(t) &= (2\cos(2t),-2\cos(t),-2\operatorname{sen}(t)) \end{aligned}$$

   Entonces $\alpha'(0)=(0,0,2)$, $\alpha''(0)=(2,-2,0)$ luego $\alpha'(0)\times\alpha''(0)=(4,4,0)$ por lo que el vector binormal en $t=0$ es

   $$B(0)=\frac{\alpha'(0)\times\alpha''(0)}{\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|}=\frac{1}{4\sqrt{2}}(4,4,0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\,.$$

   La ecuación del plano osculador en P es:

   $$((x,y,z)-(-1,2,2))\cdot B(0)=0 \iff \frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(y-2)=0 \iff x+y-1=0\,.$$

   Puntaje Pregunta 1.

   - 3 puntos por obtener una parametrización para la curva intersección.
   - 3 puntos por obtener la ecuación del plano osculador en P.

2. Reparametrice la curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2+1} - 1, \frac{2t}{t^2+1}\right)$$

respecto a la longitud de arco medida desde el punto $(1,0)$ en la dirección en que se incrementa t. Exprese la parametrización en su forma más simple y determine la traza de la curva.

Solución. Tenemos que el vector tangente de la curva $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{-2(2t)}{(1+t^2)^2}, \frac{2(t^2+1)-2t(2t)}{(1+t^2)^2}\right) = \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right)$$

Entonces

$$\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = \frac{16t^2}{(1+t^2)^4} + \frac{4(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4} = \frac{16t^2+4-8t^2+4t^4}{(1+t^2)^4} = \frac{4(1+t^2)^2}{(1+t^2)^4} = \frac{4}{(1+t^2)^2}\,.$$

Entonces, la función longitud de arco es

$$s(t) \;=\; \int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,du = \int_0^t \frac{2}{1+u^2}\,du = 2\arctan(t)$$

y la función inversa de la función longitud de arco es $s^{-1}(s) = \tan\left(\frac{s}{2}\right)$. Por lo que la reparametrización por longitud de arco es:

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \mathbf{r}(s^{-1}(s)) = \mathbf{r}\left(\tan\left(\frac{s}{2}\right)\right) = \left(\frac{2}{1+\tan^2(s/2)} - 1, \frac{2\tan(s/2)}{1+\tan^2(s/2)}\right) \\
&= \left(\frac{1-\tan^2(s/2)}{\sec^2(s/2)}, \frac{2\tan(s/2)}{\sec^2(s/2)}\right) = \big(\cos^2(s/2) - \operatorname{sen}^2(s/2), 2\operatorname{sen}(s/2)\cos(s/2)\big) \\
&= (\cos(s), \operatorname{sen}(s))
\end{aligned}$$

Se sigue que la traza de la curva es una circunferencia de centro en $(0,0)$ y radio 1.

Puntaje Pregunta 2.

- 1 punto por calcular el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$.
- 1 punto por calcular $\|\mathbf{r}'(u)\|^2$.
- 1 punto por obtener la función longitud de arco $s(t)$.
- 1 punto por encontrar la inversa de la función longitud de arco.
- 1 punto por encontrar una versión simplificada de la curva parametrizada por longitud de arco.
- 1 punto por determinar la traza de la curva.

3. Considere la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos(t), 1 - \operatorname{sen}(t), -\frac{3}{5}\cos(t)\right)$$

a) Determine la curvatura y la torsión de γ.

b) Deduzca que la curva γ es una circunferencia en el espacio, y encuentre su centro, radio y el plano en el que se encuentra.

Solución.

a) Tenemos que

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{4}{5}\operatorname{sen}(t), -\cos(t), \frac{3}{5}\operatorname{sen}(t)\right) \Longrightarrow \|\gamma'(t)\| = 1$$

La curva está parametrizada por longitud de arco, además

$$\gamma''(t) = \left(-\frac{4}{5}\cos(t), \operatorname{sen}(t), \frac{3}{5}\cos(t)\right) \Longrightarrow \kappa(t) = \|\gamma''(t)\| = 1\,.$$

Además, se tiene que

$$\gamma'(t)\times\gamma''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{4}{5}\operatorname{sen}(t) & -\cos(t) & \frac{3}{5}\operatorname{sen}(t) \\ -\frac{4}{5}\cos(t) & \operatorname{sen}(t) & \frac{3}{5}\cos(t) \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right) \Longrightarrow B(t) = \frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|} = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right).$$

Entonces la torsión de la curva es $\tau(t) = \|B'(t)\| = 0$.

b) Note que $\tau(t) = 0$ para todo t entonces la curva está contenida en un plano y como la curvatura es constante entonces la curva es una circunferencia. El radio de la circunferencia es $r = \dfrac{1}{\kappa(t)} = 1$. La circunferencia está contenida en el plano osculador que tiene ecuación

$$((x, y, z) - \gamma(0)) \cdot B(0) = 0 \Longleftrightarrow 3x + 4z = 0\,.$$

El centro de la circunferencia se encuentra en:

$$C = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) = \gamma(t) + \gamma''(t) = (0, 1, 0)\,.$$

Puntaje Pregunta 3.

- 1,5 puntos por encontrar la curvatura.
- 1,5 puntos por encontrar la torsión.
- 0,8 puntos por deducir que la curva está contenida en una circunferencia.
- 0,7 puntos por encontrar el radio de la circunferencia.
- 0,7 puntos por encontrar la ecuación del plano osculador en donde la curva está contenida.
- 0,8 puntos por encontrar el centro de la circunferencia.

4. Sea $\alpha : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ una curva plana parametrizada por longitud de arco y curvatura constante. Considere la curva

$$\beta(s) = \alpha(s) - aN(s)$$

donde a es una constante positiva y N es el vector normal de la curva α.

Determine la curvatura de la curva β.

Solución. Como la curva es plana se tiene que la torsión es cero, es decir $\tau(s) = 0$ para todo $s \in [0, \ell]$. Usando la ecuaciones de Frenet-Serret, obtenemos que el vector tangente de la curva β es:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) - aN'(s) = T(s) - a(-\kappa T(s)) = (1 + a\kappa)T(s) \, .$$

Derivando con respecto a s se obtiene que:

$$\beta''(s) = (1 + a\kappa)T'(s) = (1 + a\kappa)\kappa N(s)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \beta'(s) \times \beta''(s) &= [(1 + a\kappa)T(s)] \times [(1 + a\kappa)\kappa N(s)] = (1 + a\kappa)^2 \kappa T(s) \times N(s) = (1 + a\kappa)^2 \kappa B(s) \\ \|\beta'(s) \times \beta''(s)\| &= (1 + a\kappa)^2 \kappa \|B(s)\| = (1 + a\kappa)^2 \kappa \\ \|\beta'(s)\| &= (1 + a\kappa)\|T(s)\| = (1 + a\kappa) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la curvatura de la curva β es

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\|\beta'(s) \times \beta''(s)\|}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{(1 + a\kappa)^2 \kappa}{(1 + a\kappa)^3} = \frac{\kappa}{1 + a\kappa} \, .$$

Puntaje Pregunta 4.

- 1 punto por calcular $\beta'(s)$
- 1 punto por calcular $\beta''(s)$
- 1 punto por calcular $\beta'(s) \times \beta''(s)$
- 1 punto por calcular $\|\beta'(s) \times \beta''(s)\|$
- 1 punto por calcular $\|\beta'(s)\|$
- 1 punto por calcular la curvatura de β.