Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
12 de junio de 2013

MAT1630 ⋆ Cálculo 3

Solución de la Interrogación # 3.

1. *a*) Calcule la integral de línea
$$\int_C \sin x dy + y\cos x dx$$
donde C es la elipse dada por la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 1$.

b) Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F}(x, y, z) = 2xyz\sin(x^2z)\hat{\imath} - \cos(x^2z)\hat{\jmath} + x^2y\sin(x^2z)\hat{\mathbf{k}}$. Compruebe que $\vec{F}$ es conservativo y calcule un potencial para él.

Solución:

a) Ecribiendo $P = y\cos x$ y $Q = \sin x$, se verifica fácilmente que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Como la curva dada es una curva cerrada simple, usando el teorema de Green:
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0, \tag{1}$$
donde $D = \{x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$.

b) Para probar que el campo es conservativo, basta con exhibir el potencial. Alternativamente, se puede verificar que el rotacional de $\vec{F}$ es $\vec{0}$.

Buscamos el potencial $U(x, y, z)$: de la componente $\hat{\jmath}$ de $\vec{F}$, se deduce que $U(x, y, z) = -y\cos(x^2z) + h(y, z)$ para alguna función h por determinar.

Derivamos con respecto a x e igualamos el resultado con la componente $\hat{\imath}$ de $\vec{F}$:
$$2xyz\sin(x^2) + \frac{\partial h(x, z)}{\partial x} = 2xyz\sin(x^2). \tag{2}$$
Por lo tanto, h no depende de x, y $U(x, y, z) = -y\cos(x^2z) + g(z)$ para alguna función g. Finalmente, derivamos con respecto a z e igualamos con la componente $\hat{\mathbf{k}}$ de $\vec{F}$:
$$x^2y\sin(x^2z) + g'(z) = x^2y\sin(x^2z), \tag{3}$$
de donde concluimos que g es una constante, y por lo tanto, $U(x, y, z) = -y\cos(x^2z)$ (se puede tomar la constante de integración igual a 0). También se puede determinar el potencial por inspección en cuyo caso, no se asigna puntaje parcial en caso de error.

2. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F}(x, y, z) = e^{xy}\cos z\hat{\imath} - x^2z\hat{\jmath} + xy\hat{\mathbf{k}}$, y sea S la superficie $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x \geq 0$, orientada en la dirección del eje x positivo (la normal apuntando hacia afuera de la esfera). Calcule
$$\int_{\partial S} \vec{F}$$

Solución:

Un cálculo directo de la integral de línea sería complicado. Intentamos usando el Teorema de Stokes:
$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int\int_S \nabla \times \vec{F} \tag{4}$$

Calculamos el rotacional:

$$\nabla \times \vec{F} = (x + x^2, -y - e^{xy} \sin z, -2xz - xe^{xy} \cos z). \tag{5}$$

Notamos que, si $x = 0$, esto se reduce a $(0, -y - \sin z, 0)$, por lo tanto, conviene aplicar el teorema de Stokes mirando ∂S como la frontera de la superficie $D = \{y^2 + z^2 \leq 1,\ x = 0\}$. Para esta superficie, $\hat{\mathbf{n}} = (1, 0, 0)$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} &= \iint_D \nabla \times \vec{F} && (6)\\ &= \iint (0, -y - \sin z, 0) \cdot (1, 0, 0)\, dy\, dz && (7)\\ &= 0. && (8) \end{aligned}$$

3. Calcule

$$\iint_S x^2 y dS$$

siendo S la frontera del cubo $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Solución:

La integral se divide de acuerdo a las seis caras del cubo que llamamos $S_1, \cdots, S_6$.

- Cara superior, S_1: se trata de una integral doble común y corriente

$$\iint_{S_1} x^2 y\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 y\, dx\, dy = 0. \tag{9}$$

- Cara inferior, S_2: la integral es idéntica a la anterior! $\iint_{S_2} x^2 y\, dS = 0$.
- Cara $x = -1$, S_3:

$$\iint_{S_3} x^2 y\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (-1)^2 y\, dy\, dz = 0. \tag{10}$$

- Cara $x = 1$, S_4: la integral es idéntica a la integral sobre S_3. $\iint_{S_4} x^2 y\, dS = 0$.
- Cara $y = -1$, S_5:

$$\iint_{S_5} x^2 y\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 (-1)\, dx\, dz = -\frac{4}{3}. \tag{11}$$

- Cara $y = 1$, S_6:

$$\iint_{S_5} x^2 y\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 (1)\, dx\, dz = \frac{4}{3}. \tag{12}$$

Sumando todas la integrales, concluimos que $\iint_S x^2 y dS = 0$.

4. Calcular

$$\int_C 3x^2 y \sin(x^3) dx - \cos(x^3) dy,$$

siendo C la unión de las curvas

$$\begin{cases} C_1: & x^{2/3}+y^{2/3}=1, \quad x\in[-1,0], \\ C_2: & (x-1)^2+(y-1)^2=1, \quad x\in[0,2],\ y\geq 1, \\ C_3: & (x-1)^2+(y+1)^2=1, \quad x\in[0,2],\ y\leq -1 \end{cases}$$

recorrida **desde** el punto $P(2,1)$ **hacia** el punto $Q(2,-1)$.

Solución:

Sea C_4 el segmento de recta que une los puntos $Q(2,-1)$ y $P(2,1)$ orientado de Q a P. Llamamos $\tilde{C}$ la unión de C y C_4. Luego, $\tilde{C}$ es una curva cerrada simple orientada positivamente y podemos aplicar el teorema de Green . Sea D la región contenida dentro de $\tilde{C}$,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{C}} 3x^2y\sin(x^3)dx-\cos(x^3)dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(-\cos(x^3))-\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y\sin(x^3))\right]dx\,dy \\ &= \iint_D 0\,dx\,dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, $\int_{\tilde{C}}=\int_C+\int_{C_4}$, por lo que sólo falta calcular la integral sobre C_4. Parametrizamos C_4: $\gamma(t)=(2,t)$, $t\in[-1,1]$. Luego, $\gamma'(t)=(0,1)$ y

$$\int_{C_4} 3x^2y\sin(x^3)dx-\cos(x^3)dy = -\int_{-1}^{1}\cos(2^3)\,dt=-2\cos 8.$$

Finalmente,

$$\int_C 3x^2y\sin(x^3)dx-\cos(x^3)dy=-\int_{C_4}3x^2y\sin(x^3)dx-\cos(x^3)dy=2\cos 8.$$