Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 8

Divergencia y rotacional

1. Resumen

Si el campo vectorial sobre R^3 $\vec{F}$ y sus derivadas parciales P, Q, R existen, entonces el rotacional de $\vec{F}$ es

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Si $F = \nabla f$, entonces $rot(\nabla f) = 0$. Por lo tanto, si F tiene derivadas parciales continuas y su rotor es cero, el campo es conservativo.

El rotacional habla de la componente de rotación de un campo vectorial. Si el rotor es cero, no hay 'espirales' en el campo.

Si el campo vectorial sobre R^3 $\vec{F}$ y sus derivadas parciales P, Q, R existen, entonces la divergencia de F es

$$div\ F = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

La divergencia habla de la tendencia de un fluido a divergir en el punto (x,y,z). Si la divergencia de un fluido es cero, se denomina incompresible.

$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ es el operador llamado laplaciano.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Tiene relación con la ecuación de laplace $\nabla^2 f = 0$

También es útil recordar que si F es un campo vectorial con derivadas parciales continuas

$$div(rotF) = 0$$

Formas vectoriales del teorema de green

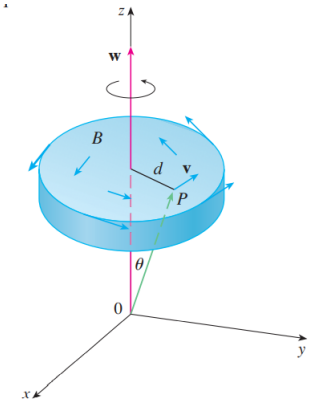
$$\oint_C F \cdot dr = \int\int_D (rotF) \cdot k\ dA$$
$$\oint_C F \cdot n\ ds = \int\int_D (divF)\ dA$$

2. Problemas

Problema 1

Este ejercicio demuestra la relación entre el vector rotacional y las rotaciones. Sea B un cuerpo rígido que gira alrededor del eje z. La rotación se puede describir mediante el vector w= ωk, donde ω es la velocidad angular de B, es decir, la velocidad tangencial de cualquier punto P en B dividido por la distancia d a partir del eje de rotación. Sea $r = (x, y, z)$ el vector de posición de P.

1. Considere el ángulo θ de la figura, y demuestre que el campo de velocidades de B está dado por $v = \omega \times r$
2. Demuestre que $v = -\omega\ y\ \hat{i} + \omega\ x\ \hat{j}$
3. Demuestre que el rotor de v es 2ω



Problema 2

Sea $\mathbf{r} = x\ \hat{i} + y\ \hat{j} + z\ \hat{k}$ y $r = |\mathbf{r}|$, verifique las siguientes igualdades

1. $\nabla\ r = \mathbf{r}/r$
2. $\nabla\ (1/r) = -\mathbf{r}/r^3$
3. $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$
4. $\nabla\ ln\ r = \mathbf{r}/r^2$

Problema 3

Demuestre la identidad, suponiendo que todas las derivadas parciales son continuas.

Si f es un campo escalar y **F,G** son campos vectoriales, entonces $f\mathbf{F}$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ y $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ se definen como

$$fF(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)$$
$$(f \cdot \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{G}(x, y, z)$$
$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \times \mathbf{G}(x, y, z)$$

1. div(F+G) = div(F) + div(G)
2. rot(F+G) = rot(F) + rot(G)
3. div(fF) = f div(F) + F·∇f
4. rot(fF) = f rot(F) + (∇f) × F
5. div(F × G) = G · rot F - F · rot G
6. div $(\nabla f \times \nabla g) = 0$
7. rot(rot F) = ∇(div(F) - ∇^2F

Problema 4

Utilice la forma vectorial del teorema de Green para demostrar la **primera identidad de green**

$$\int\int_D f\nabla^2 g \; dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot n \; ds - \int\int_D \nabla f \cdot \nabla g \; dA$$

Donde D y C satisfacen las hipótesis del teorema de Green, y las derivadas parciales de f y g existen y son continuas. (La cantidad $\nabla g \cdot n = D_n g$) se presenta en la integral de línea. Ésta es la derivada direccional en la dirección del vector normal n y se llama la derivada normal de g)

Problema 5

1. ¿Existe un campo vectorial **G** sobre R^3 tal que $rot\ G = (x\ sen(y), cos(y), z - x\ y)$? Explique.
2. Demuestre que cualquier campo vectorial de la forma

$$F(x, y, z) = f(x)\ \hat{i} + g(y)\ \hat{j} + h(z)\ \hat{k}$$

   Donde f,g y h son funciones derivables, es irrotacional.

Problema 6

Si el campo vectorial $\vec{F}$ se obtiene del rotor de otro campo vectorial $G(x, y, z) = (P, Q, R)$, y además se sabe que $\nabla^2 f = -\vec{F}$.

1. Muestre de manera algebraica que $div(\vec{F}) = 0$
2. Utilizando lo anterior, demuestre la siguiente igualdad

$$\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{F}) + \vec{r} \cdot \vec{F} = 0$$

   .

   Donde $r(x, y, z) = (x, y, z)$