MAT–1630 - CALCULO III
PAUTA INTERROGACIÓN 2
Primer Semestre 2018

1. Calcule la integral de línea en las siguientes curvas:

$$\int_\gamma (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy$$

a) γ es la poligonal que une los puntos $(0,1)$ y $(2,4)$ compuesta por el trazo rectilíneo que une $(0,1)$ con $(1,1)$ y el trazo rectilíneo que une $(1,1)$ con $(2,4)$.

b) γ es la curva que une los puntos (0,1) con (2,4) parametrizada por : $\phi(t) = (2t, 1 + 3\,\mathrm{sen}\,(\pi\, t/2))$ con $0 \le t \le 1$.

Solución: Parte (a)
Parametrización de $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ con $\gamma_1 : t \to (t,1)$ con $0 \le t \le 1$. Dar parametrización **0.5 ptos**

$$\int_{\gamma_1} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy = \int_0^1 (6t - 1)\,dt = 3 - 1 = 2\,.$$ Calcular integral **0.5 ptos**

Parametrización $\gamma_2 : t \to (t+1, 3t+1)$ con $0 \le t \le 1$. Dar parametrización **0.5 ptos**

$$\int_{\gamma_2} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy = \int_0^1 (6(t+1)(3t+1)^2 - (3t+1)^3)\,dt$$
$$+ 3\int_0^1 (6(t+1)^2(3t+1) - 3(t+1)(3t+1)^2)\,dt = \frac{197}{4} + \frac{51}{4} = 62\,.$$ Calcular integral **1.0 ptos**

Luego, la integral vale : $2 + 62 = 64$. Calcular integral **0.5 ptos**

Solución: Parte (b)
Llamemos $P(x,y) = 6xy^2 - y^3$ y $Q(x,y) = 6x^2y - 3xy^2$.

Entonces, $P_y = 12xy - 3y^2 = Q_x$. Verificar la condición conservativo **1.0 ptos**

Puesto que las derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ el campo $\vec{F} = (P,Q)$ es conservativo en todo $\mathbb{R}^2$. Verificar la condición conservativo **0.5 ptos**

Luego todas la integrales de línea a lo largo del campo $\vec{F}$ tienen el mismo valor para cualquier curva que une los puntos $(0,1), (2,4)$.
Concluir que la integral es independiente del camino **0.5 ptos**

Como la curva γ une los puntos en la mismo sentido, se tiene que

$$\int_{\gamma_2} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy = 64\,.$$ Calcular la integral **1.0 ptos**

Otra solución Problema 1

Encontrar una función potencial $f(x,y)$, que cumpla que su gradiente sea igual a las componentes del campo que nos dan. La función potencial adecuada es:

$$f(x,y) = 3x^2y^2 - xy^3\,. \qquad \boxed{\text{Determinar el potencial } \mathbf{1.5\ ptos}}$$

Puesto que de esta manera: (las derivadas parciales son)

$$\begin{aligned} f_x &= 6xy^2 - y^3 \\ f_y &= 6x^2y - 3xy^2 \end{aligned}$$

Son las componentes del campo vectorial dado: $F(x,y) = grad(f)$. $\boxed{\text{Comprobar gradiente } \mathbf{0.5\ ptos}}$

Luego, por el Teorema Fundamental de la Integral de línea, se cumple que el trabajo realizado es:

$$W_\gamma = \int_\gamma Pdx + Qdy = f(2,4) - f(0,1) = 64 \qquad \boxed{\text{Aplicar TF } \mathbf{1.0\ ptos}}$$

Parte b) Como el campo es un campo gradiente y es C^1 en cualquier región que contenga a los puntos $(0,1),(2,4)$ se sabe que la integral de línea sólo depende de los valores del potencial f en los puntos $(0,1)$ y $(2,1)$.

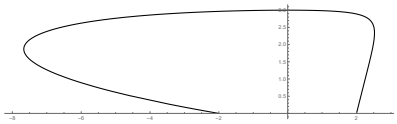
Para ello además la curva debe satisfacer las condiciones: ser suave, es decir, $\phi'(t)$ continua y $\phi'(t) \neq 0$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Ambas condiciones se cumplen puesto que $\phi'(t) = (2, \pi/2\ \cos(\,(\pi\, t/2))$ $\boxed{\text{Verificar hipótesis del TF } \mathbf{1.0\ ptos}}$

Además la curva $\gamma_3 : \phi(t) = (2t, 1 + 3\,\text{sen}\,(\pi\, t/2))$ con $0 \leq t \leq 1$ está orientada : comienza en $(0,1)$ y termina en $(2,4)$ se obtiene: $\phi(0) = (0,1)$ y $\phi(1) = (2,4)$.

$\boxed{\text{Verificar la orientación de la curva } \mathbf{1.0\ ptos}}$

$$\int_{\gamma_3} Pdx + Qdy = 64\,. \qquad \boxed{\text{Calcular la integral de línea } \mathbf{1.0\ ptos}}$$

2. Considere $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la curva parametrizada como
$r(t) = (\cos(t)\big(2 + \operatorname{sen}(t)e^t\big)\,,\, \operatorname{sen}(t)\big(3 + \cos^2(t)\big)), t \in [0, \pi]$, graficada abajo.

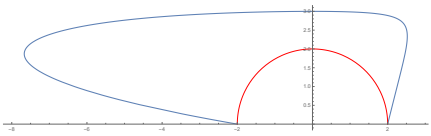


Calcule la integral de trabajo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F}$ es el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = (3 - \frac{y}{x^2 + y^2}\,,\, 2 + \frac{x}{x^2 + y^2}).$$

Ayuda. Observar que el campo tiene una singularidad en $(0, 0)$**.**

Solución: Queremos aplicar teorema de Green, pero el campo $\vec{F}$ tiene problemas en $(0, 0)$, que esta en la línea recta que une $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, así que ocupamos la semicircunsferencia superior C mostrada en la siguiente figura



Completar camino adecuado con parametrización **1.0 ptos**

parametrizada por $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t)), \quad t \in [0, \pi]$.

Si D es el dominio entre Γ y C entonces ahí si tenemos las condiciones para ocupar el teorema de Green y denotando $\vec{F} = (P, Q)$, concluimos que (ocupando las orientaciones de las parametrizaciones arriba)

$$\int_\Gamma F \cdot dr - \int_C F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA\,.$$

Aplicar Green **1.0 ptos**

Como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0.$

Verificar condición en el interior **1.0 ptos**

Por lo tanto

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

Concluir igualdad de integrales de línea **1.0 ptos**

Calculamos la integral de trabajo sobre $C : \gamma(t) = (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t)), t \in [0, \pi]$ directamente

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_0^\pi (3 - \frac{2\operatorname{sen}(t)}{4}, 2 + \frac{2\cos(t)}{4}) \cdot (-2\operatorname{sen}(t), 2\cos(t))dt \\ &= \int_0^\pi -6\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^2(t) + 4\cos(t) + \cos^2(t)dt \\ &= -12 + \pi\end{aligned}$$

Calcular la integral de línea **2.0 ptos**

y concluimos que $\int_\Gamma F \cdot dr = -12 + \pi$.

3. Llamemos S_1 a la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ que queda dentro del cono $z=\alpha\sqrt{x^2+y^2}$, $\alpha>0$, y S_2 la porción del mismo cono que queda dentro de la esfera dada. Determinar el valor de α de modo que el área de la superficies sean iguales.

Solución:

Debemos determinar la intersección de la esfera y el cono: esto sucede cuando $x^2+y^2+\alpha^2(x^2+y^2)=1$, es decir, si

$$x^2+y^2=\frac{1}{1+\alpha^2}=a^2\ ,\ z=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,.$$ Descripción de la entersección **1.0 ptos**

Así, S_1 corresponde a la porción de la esfera con $z\geq 0$ y $x^2+y^2\leq a^2$, mientras que S_2 corresponde a la porción del cono también con $x^2+y^2\leq a^2$.

En ambos casos calculamos áreas con parametrización con $z=f(x,y)$ un gráfico y elemento de área $d\sigma=\sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy$.

Para S_1 tenemos

$$1+|\nabla f|^2=1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}=\frac{1}{1-x^2-y^2}\,,$$ Determinar elemento de área para S_1 **1.0 ptos**

así que

$$A_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=2\pi\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=2\pi\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\,.$$ Cálculo de área de S_1 **1.0 ptos**

Para S_2 tenemos

$$1+|\nabla f|^2=1+\frac{\alpha^2x^2}{x^2+y^2}+\frac{\alpha^2y^2}{x^2+y^2}=1+\alpha^2\,,$$ Determinar elemento de área para S_2 **1.0 ptos**

de modo que

$$A_2=\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\sqrt{1+\alpha^2}\,dxdy=\pi a^2\sqrt{1+\alpha^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,.$$ Cálculo de área para S_2 **1.0 ptos**

La condición de que $A_1=A_2$ da que $\alpha=3/4$. Cálculo de α **1.0 ptos**

4. Considere la superficie Σ parametrizada por $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ según la ecuación

$$r(u, v) = (u\,,\, 1 + u^2 + v^2\,,\, v).$$

a) Encuentre la ecuación del plano tangente a Σ en el punto $r(u, v)$.

b) Sea $\Gamma \subset \Sigma$ los puntos de la superficie Σ cuyos planos tangentes pasan por el origen. Encuentre una parametrización de la curva Γ.

Solución:

a) Primero calculemos un vector normal al plano tangente a Σ en el punto $r(u, v)$. Calculamos

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = (1, 2u, 0)$$
$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = (0, 2v, 1)$$

Calcular derivadas parciales **1.0 ptos**

$$\Rightarrow r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2u & 0 \\ 0 & 2v & 1 \end{vmatrix} = (2u, -1, 2v)$$

Calcular vector normal del plano **1.0 ptos**

El vector $r_u \times r_v$ es un vector normal al plano tangente y el plano tangente a Σ en $r(u, v)$ corresponde a los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(x, y, z) - r(u, v)) \cdot ((2u, -1, 2v) = 0$ En resumen, todos los planos tangentes a la superficie son

$$2ux - y + 2vz = u^2 + v^2 - 1\,.$$

Determinar la ecuación del plano tangente **1.0 ptos**

Observación: Un vector normal también se puede encontrar observando que Σ corresponde al gráfico de una función (es de la forma $(u, h(u, v), v)$), y por lo tanto $(-\partial h/\partial u, 1, -\partial h/\partial v)$ es un vector normal a la superficie en el punto $r(u, v)$, y basta con calcular las derivadas parciales de h y reemplazar.

b) Un plano tangente pasa por el origen ssi $(0, 0, 0)$ satisface la ecuación del plano.
Luego, los planos tangentes a Σ en el punto $r(u, v)$ pasan por el origen deben satisfacer que

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Expresar condición **1.0 ptos**

Todos los posibles valores de u, v que satisfacen esta ecuación forman un círculo en $\mathbb{R}^3$

Identificar la curva **0.5 ptos**

Debe estar en la superfice, luego su parametrización es :

$$(\cos t\,,\, 2\,,\, \sin t\,)\,, t \in [0, 2\pi]\,.$$

Parametrización de la curva **1.5 ptos**