Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Segundo Semestre 2023

MAT-1630 - Interrogación 2

1. Se quiere construir un estanque de agua en la ladera de un cerro, construyendo un muro cilíndrico de radio 2, centrado en el eje z, sobre el suelo desnivelado del cerro. La altura de la ladera está dada por la ecuación $z = 25-(x-3)^2-y^2$ y el borde superior del estanque está a altura $z = 27$.

   Calcule el área total del muro del estanque.

   Solución: Podemos pensar el área del muro como la integral de la altura de este, sobre la curva $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Esta curva tiene $\vec{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$ con $|\vec{r}'(t)|$.

   La altura del muro en cada punto está dada por $27-z = 27-(25-(x-3)^2-y^2)$, por lo que

$$Area = \int_C 2 + (x-3)^2 + y^2 \; ds = \int_0^{2\pi} (15 - 12\cos t) \; 2 \; dt = 60\pi.$$

2. Considere la curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ que se obtiene al intersectar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el manto $z = 1 - x^2$, restringido a $x \geq 0$ y orientada tal que el punto inicial es $(0, -1, 0)$. Sea $F(x, y, z) = (z, xy, y + 1)$ un campo de fuerzas.

   (a) (1 pts.) Encuentre una parametrización de la curva $\mathcal{C}$.

   (b) (5 ptos.) Calcule directamente el trabajo realizado por F al recorrer la curva $\mathcal{C}$.

   Solución.

   (a) Por estar sobre el cilindro de radio 1 consideramos $x = \cos(\theta), y = \text{sen}(\theta)$ y luego $z = 1 - \cos^2(\theta)$. Como $x \geq 0$ restringimos a $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ y la parametrización de $\mathcal{C}$ es

$$r(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 1 - \cos^2(\theta)), \qquad \theta \in [-\pi/2, \pi/2],$$

   que comienza en el punto $(0, -1, 0)$

   (b) Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= (-\sin(\theta), \cos(\theta), 2\cos(\theta)\sin(\theta)), \\
F(r(\theta)) &= (1 - \cos^2(\theta), \cos(\theta)\sin(\theta), \sin(\theta) + 1), \\
F \cdot \frac{dr}{d\theta} &= (1 - \cos^2(\theta), \cos(\theta)\sin(\theta), \sin(\theta) + 1) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 2\cos(\theta)\sin(\theta)) \\
&= -\sin(\theta) + 2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\
\int_C F \cdot dr &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\sin(\theta) + 2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta) d\theta \\
&= 0 + 0 + \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

3. Considere en $\mathbb{R}^3$ el campo de fuerzas

$$F(x,y,z) = (4xyz - z, 2x^2z + 12y^3, 2x^2y - x)$$

(a) Calcule un potencial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de este campo vectorial, justificando todos los pasos.

(b) Calcule el trabajo realizado por la fuerza F al subir desde el origen al punto $(3,1,5)$.

Solución:

(a) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un potencial de F, tenemos que $F = (f_x, f_y, f_z)$ luego $f_x = 4xyz - z$ e integrando con respecto a x obtenemos

$$f(x,y,z) = \int 4xyz - z \; dx = 2x^2yz - xz + g(y,z)$$

y $f_y = 2x^2z + g_y$ luego $g_y = 12y^3$ e integrando con respecto a y obtenemos

$$g(y,z) = \int 12y^3 \; dy = 3y^4 + h(z) \quad \text{y} \quad f(x,y,z) = 2x^2yz - xz + 3y^4 + h(z).$$

Derivando obtenemos $f_z = 2x^2y - x + h_z$, por lo que $h_z(z) = 0$, luego h es constante y podemos elegirla igual a 0. Juntando todo obtenemos

$$f(x,y,z) = 2x^2yz - xz + 3y^4.$$

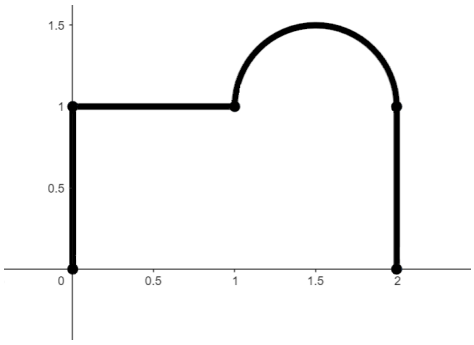
(b) Como $F = \nabla f$ es un campo conservativo, podemos usar el Teorema fundamental de las integrales de linea para obtener que, para cualquier curva C de $(0,0,0)$ a $(3,1,5)$ tenemos

$$Trabajo = \int_C F \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(3,1,5) - f(0,0,0) = 78.$$

4. Considere en $\mathbb{R}^2$ el campo de fuerzas

$$F(x,y) = (2y^2 - 5y + \sin x, e^{y^2} + 4xy - 3).$$

Considere la curva $\mathcal{C}$ compuesta de dos segmentos rectos, un semicirculo y otro segmento recto, como se muestra en la figura, orientada comenzando desde el punto $(0,0)$ (terminando en $(2,0)$).



(a) (1pto.) Si Γ es el segmento del eje x que va desde $(0,0)$ a $(2,0)$, calcule la integral de trabajo de F sobre Γ.

(b) (5 ptos.) Utilizando la integral anterior y el teorema de Green, calcule la integral de trabajo de F sobre $\mathcal{C}$.

Solución:

(a) la curva Γ se puede parametrizar como $\gamma(t) = (t,0), t \in [0,2]$, luego $d\gamma/dt = (1,0)$ y $F(t,0) = (\sin(t), -2)$, por lo tanto

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma = \int_0^2 (\sin(t), -2) \cdot (1,0) dt = \int_0^2 \sin(t) dt = 1 - \cos(2).$$

(b) Tenemos que $\Gamma \cup (-\mathcal{C})$ forman una curva cerrada, simple por tramos, orientada positivamente. Por el teorema de Green, y como $Q_x - P_y = 5$,

$$\int_{\Gamma \cup (-\mathcal{C})} F \cdot dr = \iint_D Q_x - P_y dA = 5 \times \text{Área}(D),$$

donde D es el dominio plano encerrado por $\Gamma \cup (-\mathcal{C})$ y pot lo tanto su área es $2 + \pi/8$ y teniendo en cuenta las orientaciones de las integrales de trabajo, concluimos que

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_\Gamma F \cdot d\gamma - \int_{\Gamma \cup (-\mathcal{C})} F \cdot dr = 1 - \cos(2) - 5\left(2 + \frac{\pi}{8}\right) = -9 - \frac{5\pi}{8} - \cos(2).$$