

Integrales de Línea para campos vectoriales

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

10 de enero de 2023

Integrales de Línea para campos vectoriales

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Sean $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo definido sobre la curva C regular de clase C^1 parametrizada por $\alpha(t)$, $t \in [a, b]$. Entonces la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt$$

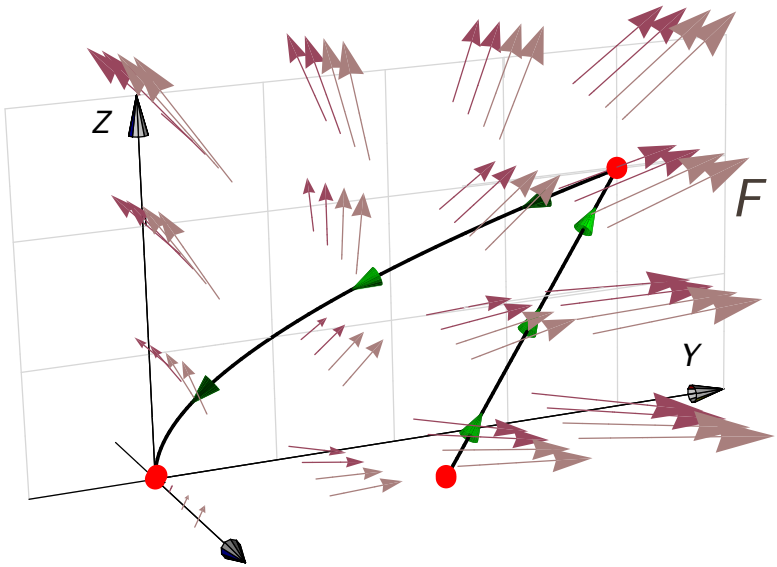
Notación Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial continuo en $\mathbb{R}^3$ y $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entones $d\alpha = (dx, dy, dz)$ y la integral de línea de $\mathbf{F}$ sobre la curva C se escribe también

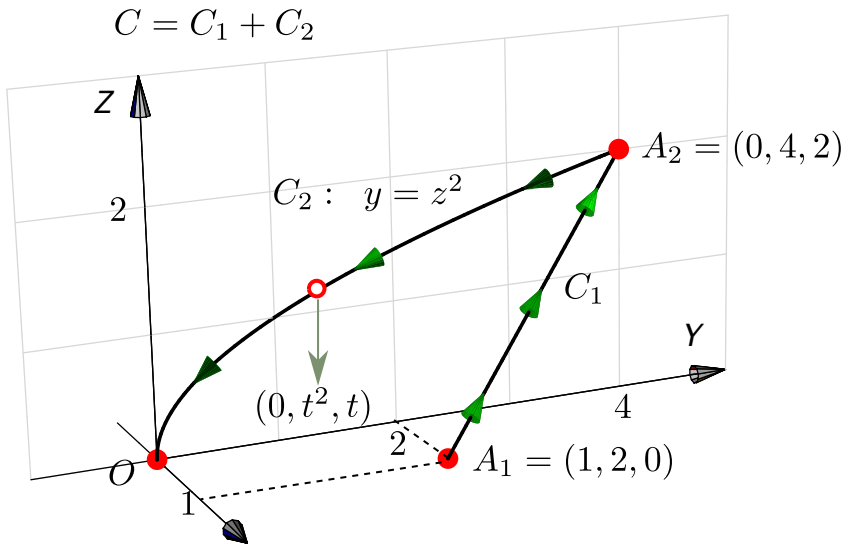
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = \int_C P dx + Q dy + R dz\ .$$

Integrales de Línea para campos vectoriales

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - z, x + z)$ y sea C la curva de la figura. Calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$.





EJEMPLO 2 Calcular

$$\int_C ydx + zdy + xdz$$

donde C es la curva intersección de las superficies $z = xy$ y $x^2 + y^2 = 1$.

Trabajo

Sean M_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ puntos en una curva α ordenados tal que $\alpha(t_i) = M_i$.
Sean $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = \alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

Sea P_i en α entre M_{i-1} y M_i tal que $\alpha(\xi_i) = P_i$.
Si $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ representa una fuerza, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}(P_i) \cdot (M_i - M_{i-1})$$

es una aproximación al trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ al desplazar una partícula de masa 1, a lo largo de la curva α.

Integrales de Línea para campos vectoriales

Haciendo $m \to \infty$ se obtiene

$$\begin{aligned} W &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}(P_i) \cdot (M_i - M_{i-1}) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}(\alpha(\xi_i)) \cdot \alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_C F \cdot d\alpha \end{aligned}$$

Integrales de Línea para campos vectoriales

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Proposición.

El trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de una curva C es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha \, .$$

EJEMPLO 3 Calcular el trabajo realizado por el campo $F(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ a lo largo de la curva C que es la intersección de las superficies

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + z^2 = 2z \\ \text{con } y \geqslant 0 \end{cases}$$

La curva está recorrida de modo que reflejada en el plano XZ el sentido es positivo.