PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2019

MAT1630 - Cálculo III
Interrogación 2

1. (a) Encuentre el valor de $b > 0$ que minimaza el trabajo producido al mover una partícula sometida al campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (3y^2 + 2, 16x),$$

desde el punto $(-1, 0)$ al punto $(1, 0)$ a lo largo de la semielipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$ donde $y \geq 0$.

(b) Calcule el área de la región $\mathcal{R}$ acotada por el eje x y la curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ donde $t \in [0, 2\pi]$.

Solución.

(a) Sea $\mathcal{W}(\mathbf{F})$ el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$ a lo largo de la semielipse $\mathcal{E} : b^2x^2 + y^2 = b^2$ con $y \geq 0$. Una parametrización para $\mathcal{E}$ es $r(t) = (\cos t, b \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$ y orientación negativa. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\mathbf{F}) &= \int_{\mathcal{E}} \mathbf{F}.\mathrm{d}r \\
&= \int_{\pi}^{0} \mathbf{F}(r(t).r'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\pi}^{0} (3b^2 \sin^2 t + 2, 16 \cos t).(-\sin t, b \cos t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\pi}^{0} (-3b^2 \sin^3 t - 2 \sin t + 16b \cos^2 t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\pi}^{0} \left(-3b^2(1 - \cos^2 t) \sin t - 2 \sin t + 8b(1 + \cos(2t))\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\pi}^{0} \left((-3b^2 - 2) \sin t + 3b^2 \cos^2 t \sin t + 8b \cos(2t) + 8b)\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[(3b^2 + 2) \cos t - b^2 \cos^3 t\right]_{\pi}^{0} \\
&= 4b^2 - 8\pi b + 4.
\end{aligned}$$

Obtenemos una función cuadratida en b tal que $\mathcal{W}(\mathbf{F}) = h(b) = 4b^2 - 8\pi b + 4$ tal que $h'(b) = 8(b - \pi)$ y la función h alcanza un valor minimo en $b = \pi$ que es $h(\pi) = 4(1 - \pi^2)$. Entonces el trabajo minimo realizado para mover la partícula es $4(1 - \pi^2)$ que se alcanza para $b = \pi$.

(b) Sea A el área de la región $\mathcal{R}$ y γ la curva parametrizada por $r(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$. que corresponde a es una curva simple cerrada suave por tramos con orientación negativa. Notamos que se trata de una región que delimitamos

por un cicloïde y el eje x. Entonces por la fórmula de Green,

$$A = \int_\gamma x\mathrm{d}y = -\int_\gamma y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x).$$

Entonces por el teorema de Green, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)a(1-\cos t)\mathrm{d}t \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \mathrm{d}t \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos(2t))\ \mathrm{d}t \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

Distribución de puntaje.

(a)
- Parametrizar la semielipse $\mathcal{E}$, (**0.5 punto**).
- Definir el trabajo y la integral de línea tomando en cuenta la orientación desde $(-1,0)$ hasta $(1,0)$, (**0.5 punto**).
- Calcular correctamente la integral de línea, (**2 punto**).
- Encontrar el valor minimo del trabajo, (**1 punto**).

(b)
- Justificar la aplicabilidad del teorema de Green con $P = 0, Q = x$, o $P = -y, Q = 0$ o $P = -\frac{1}{2}y, Q = \frac{1}{2}x$, (**0.5 punto**).
- Evaluar el área tomando en cuenta la orientación, (**1.5 punto**).

2. Sea el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2), \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, el campo $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función potencial?
(b) Calcule la función potencial para esos valores.

Solución.

(a) Para cualquier valor de a, al campo $\mathbf{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$ (convexo) y será conservativo si su rotacional es cero para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculamos

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (0, -3z^2 - (1-a)z^2, 2x(a-2) - ax).$$

Entonces $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ si para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se cumplen las ecuaciones

$$(1-a)z^2 + 3z^2 = 0, \ 2x(a-2) - ax = 0,$$

de donde $a = 4$. Así para $a = 4$, el campo $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función potencial.

(b) Existe una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) = (4xy - z^3, 2x^2, -3xz^2)$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 4xy - z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2xz^2.$$

Si integramos la primera ecuación respecto a la variable x, obtenemos

$$f(x, y, z) = \int (4xy - z^3) \mathrm{d}x = 2x^2y - xz^3 + h(y, z).$$

Para determinar la función h, calculamos las derivadas parciales de f con respecto a y y a z y comparamos con las dos últimas ecuaciones del sistema anterior. Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2x^2 = 2x^2 + \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = 0$$
$$\Rightarrow h(y, z) = h(z),$$

entonces h es una función que depende sólo de la variable z. De la misma manera tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -3xz^2 = -3xz^2 + \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = -3xz^2 + h'(z) \Rightarrow h'(z) = 0.$$

Luego $h(z) = C$ donde $C \in \mathbb{R}$ y la función potencial del campo $\mathbf{F}$ es

$$f(x, y, z) = 2x^2y - xz^3 + C.$$

Distribución de puntaje.

(a)
- Justificar que el campo $\mathbf{F}$ es $\mathcal{C}^1$ sobre todo $\mathbb{R}^3$, y que será conservativo si $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, (**0.5 punto + 0.5 punto**).
- Calcular correctamente $\operatorname{rot} \mathbf{F}$, (**1 punto**).
- Deducir el valor $a = 0$, (**1 punto**).

(b)
- Escribir las ecuaciones del gradiente, (**0.5 punto**).
- Integrar una de las ecuación con respecto a la variable correpondiente por ejemplo $\frac{\partial f}{\partial x}$ con respecto a x, teniendo cuenta de una función $h(y, z)$, (**0.5 punto**).

- Determinar la función h deriviendo f y comparando con el gradiente ∇f, (**1.5 punto**).
- Determinar la función potencial f, (**0.5 punto**).

3. Considere el campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1, 3xy^2 + 1).$$

(a) ¿Es $\mathbf{F}$ conservativo?
(b) Calcule el trabajo realizado al mover un objeto desde el punto $(0, 0)$ al $(2, 0)$ a lo largo de la semicircunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$.
(c) Calcule el trabajo realizado al mover el objeto a lo largo de la circunferencia completa.

Solución.

(a) Sea $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ donde $F_1(x, y) = y^3 + 1$ y $F_2(x, y) = 3xy^2 + 1)$. Entonces

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) = 3y^2 = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Así el campo $\mathbf{F}$ es conservativo.

(b) Calculamos su función potencial f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$. Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) = y^3 + 1 \Rightarrow f(x, y) = \int (y^3 + 1)\mathrm{d}x = xy^3 + x + h(y),$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y) = 3xy2 + 1 = 3xy^2 + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 1$$
$$\Rightarrow h(y) = y + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$f(x, y) = xy^3 + x + y + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Como $\mathbf{F}$ es conservativo entonces la integral es independiente del camino, únicamente depende de los puntos inicial y final. El trabajo realizado al mover el objeto desde $(0, 0)$ hasta $(2, 0)$ será

$$W = \int_C \mathbf{F}.\mathrm{d}r = \int_C \nabla f.\mathrm{d}r = f((2, 0)) - f((0, 0)) = 2 - 0 = 2,$$

por el TFC.

(c) A lo largo de la circunferencia completa, como es una curva cerrada, el trabajo será nulo

$$\int \mathbf{F} = \int \nabla f = 0.$$

Distribución de puntaje.

(a) Verificar la condición $\partial_y F_1 = \partial_x F_1$ para que $\mathbf{F}$ sea conservativo, (**1 punto**).
(b)
- Calcular la función potencial, (**2 punto**).
- Independencia de la trayectoria, (**1 punto**).
- Expresar resultado para el trabajo, (**1 punto**).

(c) Justificar que se trata de una curva cerrada y por independencia de la trayectoria, el trabajo sobre la circunferencia completa es nulo, (**1 punto**).

4. (a) Sea $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial definido por

$$\mathbf{V}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

(i) Calcule la integral de línea a lo largo de la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$ de centro O y radio 1 con orientación directa positiva.

(ii) ¿Se trata de un campo vectorial que se deriva de un potencial? Justifíquelo.

(b) Demuestre que que la superficie $x(y^2 + z^2) - 1 = 0$ es de revolución y encuentre una curva generadora y el eje de revolución.

Solución.

(a) (i) Parametrizamos la circunferencia unitaria por $(x(t), y(t)) = \alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ donde $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\mathbf{V}(\alpha(t)) = (-\sin t, \cos t),$$

y

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{V}.\mathrm{d}\alpha = \int_0^{2\pi} (\sin^2 + \cos^2 t)\mathrm{d}t = 2\pi.$$

(ii) Este campo vectorial no se deriva de un potencial porque encontraríamos 0 a lo largo de una curva cerrada y de la pregunta anterior hemos encontrado 2π. Notamos que el campo $\mathbf{V}$ está definido en $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ que no es simplemente conexo.

(b) La ecuación $x(y^2 + z^2) - 1 = 0$ se puede escribir como $y^2 + z^2 = \frac{1}{x}$ siempre que $x \neq 0$. Es una ecuación de la forma

$$y^2 + z^2 = (f(x))^2, \quad \text{con } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0.$$

Entonces la superficie es de revolución y el eje de revolución es el eje x. Como curva generadora tomamos $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ en el plano xy o $z = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ en el plano xz.

Distribución de puntaje.

(a)
- Parametrizar la circunferencia unitaria, (**0.5 punto**).
- Desarrollar la integral de línea, (**0.5 punto**).
- Calcular la integral de línea. (**0.5 punto**).
- Responder que no se puede derivar de un potencial, (**1 punto**).
- Justificar que sino la integral anterio debría ser igual a 0 porque se trata de una curva cerrada y notar que $\mathbf{V}$ se define sobre una región no simplemente conexa, (**0.5 punto**).

(b)
- Escribir la ecuación dada como una ecuación de revolución, (**1 punto**).
- Identificar a una curva generadora, (**1 punto**).
- Determinar el eje y el plano correpondientes, (**1 punto**).