Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 11

Parametrización e integrales de superficie

1. Resumen

La integral de superficie la pueden entender cómo una integral doble sobre un campo escalar/vectorial. Si se da el caso que están integrando $f(x, y, z) = 1$ con una superficie parametrizada por $r(t) = (u, v)$, obtienen el área de esa superficie o parche -lo que se vio en la ayudantía previa a la I2-.

$$\int\int_D |r_u \times r_v| dA$$

Sin embargo, si el campo f no es igual a uno, la forma más general corresponde a

$$\int\int_S f(x, y, z) dS = \int\int_D f(r(u, v))|r_u \times r_v| dA$$

Problema 1

Considere la superficie S obtenida al rotar la curva $c(t) = (t^2 + 1, t^3)$ con $t \in [0, 3]$ en torno al eje vertical.

1. Encuentre una parametrización de S
2. Encuentre el/los puntos donde el plano tangente a S es paralelo al plano $3x + 3y + 2\sqrt{2}z = 0$

Problema 2

Calcule $\int\int_S x^2 + y^2 dS$ donde S es la superficie del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ entre $z = 0$ y $z = 3$. Ahora suponga que S es la superficie del cono que se encuentra por sobre la esfera de radio 2 y por debajo del plano situado en $z = 3$. Encuentre la masa de esa superficie si la densidad de ella está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$

Problema 3

Sea S la superficie definida por la ecuación $z = f(x, y)$ donde $x^2 + y^2 < R^2$. Suponga además que las derivadas parciales de f son continuas y satisfacen

$$|\frac{\partial f}{\partial x}| \leq 1 \qquad |\frac{\partial f}{\partial y}| \leq 1$$

Muestre que el area de S es menor o igual a $R^2\pi\sqrt{3}$

Problema 4

Se sabe que la superficie parametrizada por

$$r(u,v) = ((2 + sen(v))cos(u), (2 + \frac{2}{3}sen(v))sen(u), u + \frac{2}{3}cos(v))$$

Intersecta al plano $x = 0$ en infinitas circunferencias iguales, ¿cuál es el radio de aquellas circunferencias?

Problema 5

Considere la superficie S que se genera al rotar el círculo que se encuentra en el plano XY de radio 1 y centro $(4\sqrt{2},0,0)$ en torno al eje Y.

1. Determine la ecuación del plano tangente a S en el punto $(\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{2})$
2. Determine todos los puntos en S de modo que el plano tangente a S en esos puntos sean paralelos al plano XZ
3. Determine una expresión para el área de S

Problema 6

Determine una representación paramétrica de la superficie que se obtiene al hacer girar al rededor del eje Z la circunferencia que se encuentra en el plano XY cuyo centro es $(b, 0, 0)$. Luego, determine el área de la superficie.