PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo Semestre 2022

Examen MAT1630

1. Sea C la curva dada por la intersección de $z = x^2 + y^2$ y $z = 10 - x^2 - (y-2)^2$.

   (a) Encuentre una parametrización de C.

   Solución: Observamos que la intersección ocurre cuando

   $$x^2 + y^2 = z = 10 - x^2 - (y-2)^2 \quad \to \quad x^2 + y^2 - 2y + 2 = 5 \quad \to \quad x^2 + (y-1)^2 = 4$$

   Que corresponde a una circunferencia de radio 2 que se puede parametrizar como $(x, y) = (2\cos t, 2\sin t + 1)$. la coordenada z cumple

   $$z = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4\sin t + 1 = 5 + 4\sin t$$

   luego

   $$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t + 1, 5 + 4\sin t) \quad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi].$$

   (b) Calcule su vector tangente unitario $T(t)$ y binormal unitaria $B(t)$ en cada punto.

   Solución: Calculamos

   $$\vec{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 4\cos t) \quad \text{con}$$

   $$||\vec{r}'(t)|| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 16\cos^2 t} = 2\sqrt{1 + 4\cos^2 t}$$

   luego

   $$T(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||} = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{1+4\cos^2 t}}, \frac{\cos t}{\sqrt{1+4\cos^2 t}}, \frac{2\cos t}{\sqrt{1+4\cos^2 t}} \right)$$

   $$\vec{r}''(t) = (-2\cos t, -2\sin t, -4\sin t)$$

   $$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = (0, -8, 4)$$

   y

   $$B(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{||r'(t) \times \vec{r}''(t)||} = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

   (c) Calcule su torsión, concluya que es una curva plana y determine el plano que la contiene.

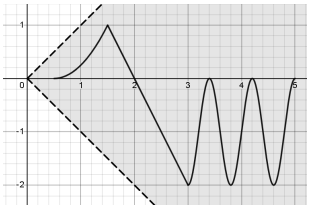
   Solución: Como el vector binormal $B(t) = (0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ es constante, si s es el arco-parámetro de C, la derivada es $0 = \frac{dB}{ds} = -\tau N$, por lo que la torsión es $\tau = 0$. Como la torsión es 0, la curva es plana y está contenida en su plano osculador: el que tiene B como nomal y pasa por un punto de la curva, tomemos $\vec{r}(0) = (2, 1, 5)$. Este plano tiene ecuación

   $$B \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{r}(0) \quad \to \quad -2y + z = -2 + 5 = 3$$

2. Sea $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}} + 2xy, \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} + x^2 \right)$ definida en la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x < y < x\}$, y C la curva obtenida al unir las siguientes curvas:

   - La curva que recorre desde $(1/2, 0)$ hasta $(3/2, 1)$ a través de la gráfica de $y = (x - 1/2)^2$.
   - La curva rectilínea desde $(3/2, 1)$ hasta $(3, -2)$.
   - La curva que recorre desde $(3, -2)$ hasta $(5, 0)$ dada por

     $$\gamma(t) = \left(e^t, \cos\left(\frac{5\pi}{2} e^t - \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right) \text{ con } \ln(3) \leq t \leq \ln(5).$$



Calcule el trabajo realizado por el campo $\boldsymbol{F}$ sobre una partícula que se desplaza a lo largo de C partiendo desde $(1/2, 0)$ y terminando en $(5, 0)$.

Solución: Consideramos $P(x,y) = \dfrac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}} + 2xy$, y $Q(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} + x^2$.

Se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-x\sqrt{x^2-y^2} + \dfrac{yx}{2\sqrt{x^2-y^2}} \cdot (-2y)}{x^2(x^2-y^2)} + 2x \\ &= \frac{\dfrac{-x^2+y^2-y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x(x^2-y^2)} + 2x \\ &= \frac{-x^2}{x(x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2-y^2)^{3/2}} + 2x, \end{aligned}$$

mientras que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}} \cdot 2x}{x^2-y^2} + 2x = \frac{-x}{(x^2-y^2)^{3/2}} + 2x$$

Por lo que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ en toda la región D. Como la región es simplemente conexa, entonces el campo es conservativo, por lo que el trabajo pedido no depende de la trayectoria.

Consideremos entonces el camino rectilíneo $\boldsymbol{r}(t) = (t, 0)$, con $1/2 \leq t \leq 5$. Entonces $\boldsymbol{r}(0) = (1/2, 0)$ y $\boldsymbol{r}(5) = (5, 0)$, por lo que $\boldsymbol{r}(t)$ tiene el mismo punto inicial y final que la curva C y está contenido dentro de la región, por lo que el trabajo a través de la curva C es igual al trabajo sobre el segmento parametrizado. De esta manera,

$$
\begin{aligned}
W &= \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_{1/2}^{5} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) dt \\
&= \int_{1/2}^{5} (0, \frac{1}{t} + t^2) \cdot (1, 0) dt \\
&= \int_{1/2}^{5} 0 dt = 0
\end{aligned}
$$

Por lo que el trabajo pedido es 0.

3. Sea C la circunferencia de radio 2 centrada en el origen, orientada en el sentido antihorario. Calcule

$$\int_C \frac{3+3y}{(x-1)^2+(y+1)^2}dx - \frac{3x-3}{(x-1)^2+(y+1)^2}dy.$$

Solución: Se pide la integral de línea $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ siendo

$$P(x,y) = \frac{3+3y}{(x-1)^2+(y+1)^2}, \quad Q(x,y) = -\frac{3x-3}{(x-1)^2+(y+1)^2},$$

y es fácil verificar que $Q_x = P_y$ para todo $(x,y) \neq (1,-1)$. Sea

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2\ ,\ (x-1)^2+(y+1)^2 \geq a^2\}$$

donde $a > 0$ es suficientemente chico para que el disco $(x-1)^2+(y+1)^2 \leq a^2$ quede en el interior del mas grande Por el Teorema de Green,

$$0 = \iint_D (Q_x - P_y)dA = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

donde γ es la circunferencia de radio a centrada en el punto $(1,-1)$ orientada en el setido antihorario, es decir la curva $(x-1)^2+(y+1)^2 = a^2$. Así, se tiene que

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{1}{a^2}\int_\gamma (3+3y)dx - 3(x-1)dy.$$

Parametrizando γ por $x = 1 + a\cos(t)$, $y = -1 + a\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, se tiene $dx = -a\sin(t)dt$, $dy = a\cos(t)dt$ y por lo tanto

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi} (3a\sin(t)(-a\sin(t))-3a^2\cos^2(t))dt = \int_0^{(-3)\pi} 2dt = -6\pi.$$

4. Sea S la superficie parametrizada por $\phi(u,v) = (u, u+v, u^2 - v^2)$ con (u,v) tales que $u^2+v^2 \leq 4$, orientada con normal hacia arriba. Calcule el flujo total a traves de S del campo $F(x,y,z) = (-y, -3x, 1)$.

Solución: Calculamos primero $d\vec{S}$,

$$\phi_u(u,v) = (1,1,2u) \quad , \quad \phi_v(u,v) = (0,1,-2v)$$

$$\phi_u \times \phi_v = (-2u-2v, 2v, 1) \quad \text{luego} \quad d\vec{S} = (-2u-2v, 2v, 1)dudv$$

Observamos que el vector $\phi_u \times \phi_v$ apunta hacia arriba, por lo que tiene la orientación requerida.

Si llamamos D al dominio $u^2+v^2 \leq 4$ tenemos

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_D F(\phi(u,v)) \cdot (\phi_u \times \phi_v)\ dA = \iint_D (-u-v, -3u, 1) \cdot (-2u-2v, 2v, 1)\ dA$$

$$= \iint_D 2u^2 + 2v^2 - 2uv + 1\ dA$$

Y usando coordenadas polares tenemos

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^2 - 2r^2 \cos\theta \sin\theta + 1)\ r\ drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\frac{2^4}{4} - 2\frac{2^4}{4}\cos\theta\sin\theta + \frac{2^2}{2} - 0)\ d\theta = 10\theta + 8\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 20\pi$$

5. Utilice el teorema de Stokes para evaluar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, 2z, 3y)$ y C es la curva de intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y el plano $x + z = 5$, orientada en sentido antihorario vista desde arriba.

Solución: Consideremos S el trozo del plano $x + z = 5$ al interior del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ orientado con normales hacia arriba. Entonces S está acotado por la curva C, y por teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot dS.$$

Se tiene que $\text{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = (3 - 2, 0 - 0, 0 - x) = (1, 0, -x)$.

Por otro lado, una parametrización de S viene dada por $r(x, y) = (x, y, 1-x)$, donde $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$. Luego, el vector normal apuntando hacia arriba es $r_x \times r_y = (1, 0, -1) \times (0, 1, 0) = (1, 0, 1)$. Así,

$$\begin{aligned}
\iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot dS = \iint_S (1, 0, -x) \cdot dS &= \iint_D (1, 0, -x) \cdot (1, 0, 1) dA \\
&= \iint_D (1 - x) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (1 - r\cos(\theta)) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r - r^2 \cos(\theta) dr d\theta \\
&= 2\pi \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^3 - \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^3 \sin(\theta)|_0^{2\pi} \\
&= 9\pi + 0 = 9\pi.
\end{aligned}$$

6. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (z\arctan(y^2), z^3\ln(x^2+1), z)$.
Usando el Teorema de la divergencia determine el flujo de $\vec{F}$ que pasa a través de la parte del paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que se sitúa encima del plano $z=1$ y está orientada hacia arriba. **Indicación: Observe que la superficie del paraboloide no es cerrada.**
.

Solución: Siguiendo la Indicación, cerramos la superficie dada agregando el disco

$$S_1 := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z=1\}$$

orientado hacia abajo, es decir $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{k}}$ en S_1, de manera que

$$\iint_S \vec{F}\cdot\mathbf{dS} = \iint_{S\cup S_1} \vec{F}\cdot\mathbf{dS} - \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\mathbf{dS}$$

y le aplicamos el Teorema de la divergencia a la integral sobre la superficie $S\cup S_1$, de manera que

$$\iint_S \vec{F}\cdot\mathbf{dS} = \iiint_E \mathrm{div}\vec{F}dV - \iint_{S_1}\vec{F}\cdot\mathbf{dS} = \iiint_E dV - \iint_{S_1}(-z)dS,$$

siendo E la región encerrada por $S\cup S_1$. Como $z=1$ en S_1,

$$\iint_{S_1}(-z)dS = -\text{área de } S_1 = -\pi.$$

Además, pasando a coordenadas cilíndricas, $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta), z = z$ con $r\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi]$, $z\in[1,2-r^2]$ y usando que el Jacobiano de este cambio de coordenadas es r se tiene que

$$\iiint_E dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^{2-r^2} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(2-r^2-1)drd\theta = 2\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Concluímos entoces que

$$\iint_S \vec{F}\cdot\mathbf{dS} = \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{3\pi}{2}.$$