PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2020

MAT1630 - Prueba 2

1. *a*) La base de una cerca está dada por un cuarto de circunferencia centrada en el origen de radio 10 metros, en el primer cuadrante. La altura de la cerca en la posición (x, y) está dada por la función $h(x, y) = 400 - (x^2 - y^2)$ metros. Calcule el área de un lado de la cerca.

   Solución:

   El área de un lado de la cerca será

   $$\int_C H(x, y)ds$$

   donde C es el arco de circunferencia

   $$x = 10\cos t$$

   $$y = 10\,\mathrm{sen}\, t$$

   con $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$
   Luego
   $\displaystyle\int_C H(x, y)ds = \int_0^{\pi/2} h(r(t))||r'(t)||dt = 10\int_0^{\pi/2} 400-(10\cos^2 t-10\,\mathrm{sen}^2\, t)dt =$
   $\displaystyle 10\int_0^{\pi/2} 400 - 10\cos(2t)dt = 2000\pi.$

b) Un alambre delgado está doblado en forma de un cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = 100$. Si la densidad en cada punto del alambre es $h(x, y) = 400 - (x^2 - y^2)$, calcule la masa del alambre.

Solución: Sólo había que reconocer que se hace el mísmo cálculo anterior,

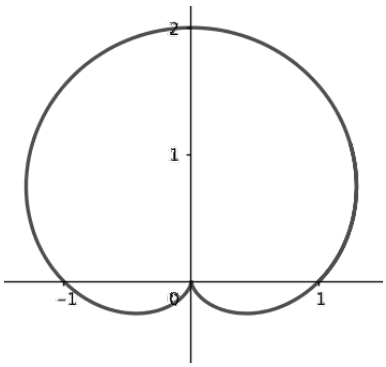
$$\int_C H(x, y)ds = 2000\pi$$

Luego la masa del alambre es 2000π

Criterio de corrección:

- 6 puntos pregunta completa.
- Si hace solo item a) o item b) asignar 4 puntos.

2. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerza $F = (y - \frac{y}{x^2+y^2}, x + \frac{x}{x^2+y^2})$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parte superior de la Cardiodes del dibujo desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$.



Solución:

Notamos que $Q_x = P_y$. Como existe una región simplemente conexa en la que la curva de la cariode que va desde $(1,0)$ a $(-1,0)$ pertenece (región que no incluya el (0,0)), entonces $\int_C F \cdot dr$ es independiente de la trayectoria en esa región.

Es decir, si tomamos la curva γ: $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, entonces

$$\int_C F \cdot dt = \int_\gamma F \cdot dr$$

$F(r(t)) = (0, 2\cos t)$ y

$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$

Por lo que $F(r(t)) \cdot r'(t) = 2\cos^2 t$

y así $\int_\gamma F \cdot dr = 2\int_0^\pi \cos^2 t = \pi$

Criterio de corrección:

- 6 puntos pregunta completa.

- Por notar análisis de independencia de la trayectoria, asignar 2 puntos.
- Por tomar curva adecuada, asignar 2 puntos. (NOTA: El trazo que une los puntos (1,0) y (-1,0), no es correcto, por que pasa por el origen.)
- Por cálculo correcto de la integral, asignar 2 puntos.

3. Dado el campo
$$F(x,y) = (2xy^3 + y + 1, 3x^2y^2 + x + 7)$$
y la curva plana C:
$$r(t) = (t, \sqrt{t^3+4})$$
con $t \in [0,2]$

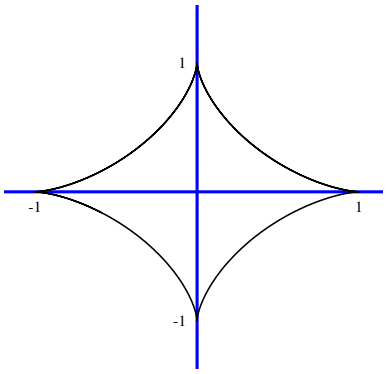
   a) Determine, si es que existe, una función potencial de F.
   Solución:
   Una función potencial es $f(x,y) = x^2y^3 + yx + x + 7y$
   Criterio de corrección:
   - 3 puntos total. No puntaje parcial

   b) Calcular $\int_C F \cdot dr$

   Solución:
   Por el teorma fundamenta se tiene que
   $\int_C F \cdot dr = f(r(2)) - f(r(0)) = f(2, 2\sqrt{3}) - f(0,2) =$

   Criterio de corrección:
   - 3 puntos total.
   - $\int_C F \cdot dr = f(r(2)) - f(r(0)) = f(2, 2\sqrt{3}) - f(0,2)$, asiganr 3 puntos, aún cuando no lo evalúen bien.
   - Si escriben $f(r(0)) - f(r(2))$ descontar 1 punto.

4. Dada la curva
$$C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$$



a) Demuestre que el área de la región encerrada por la curva es $\frac{3\pi}{8}$.

Solución:

El área es
$\int_C xdy = 3\int_0^{2\pi} \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t dt = 3\int_0^{2\pi} (\frac{1+\cos 2t}{2})(\frac{1+\cos 2t}{2})(\frac{1-\cos 2t}{2})dt =$
$\frac{3}{8}\int_0^{2\pi} (1-\cos^2(2t))(\cos(2t)+1) = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} 1-\cos(2t)-\cos^2(2t)-\cos^3(2t) = \frac{3\pi}{8}$
Criterio de corrección:

- 3 puntos total.
- Por usar una campo apropiado para cálculo de área, asiganar 0.5 punto.
- Por $\int_C xdy = 3\int_0^{2\pi} \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t dt$ (o similar, dependiendo el campo que usó), asignar 1 punto.
- Por cálculo correcto de la integral, asignar 1.5 puntos.

b) Calcular $\int_C F \cdot dr$ donde $F(x,y) = (1 - \frac{y}{x^2+y^2}, x + \frac{x}{x^2+y^2})$

Solución:

Notamos que $Q_x - P_y = 1$ Encerraremos la curva con una circunferencia centrada en el origen de radio 2, y usaremos el teorema de Green sobre la región que queda entre las curvas. (Hay que tomar cualquier curva que encierre el origen y que me contenga o esté contenida la curva dada.)

Sea $\gamma : r(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, con $t \in [0, 2\pi]$
Así

$$-\int_C F \cdot dr + \int_\gamma F \cdot dr = \int\int_D dA$$

Donde D es la región comprendida entre las dos curvas. Como el área de la circunferencia es 4π y el área que encierra la curva $r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ es $\frac{3\pi}{8}$, obtenemos que el área de la región D es $4\pi - \frac{3\pi}{8}$

Por otro lado

$F(r(t)) = (1 - \frac{\operatorname{sen} t}{2}, \frac{5}{2}\cos t)$ y $r'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$. Por lo que
$F(r(t)) \cdot r'(t) = -2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t + 5\cos^2 t$
Es decir
$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_0^{2\pi} -2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t + 5\cos^2 t dt = 6\pi$$
Por lo que finalmente
$$\int_C F \cdot dr = 2\pi + \frac{3\pi}{8}$$

- 3 puntos total.
- Por usar teorema de Green adecuadamente, asignar 1 punto.
- Por calculo correcto de integral de linea, asignar 1 punto.
- Por cálculo correcto de integral doble, asignar 1 punto.