Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2016

MAT1630 ⋆ Cálculo 3

Interrogación 3

1. Calcular la integral de flujo en el plano

$$\int_\Gamma F \cdot N \, ds$$

siendo $F = (x^3, y^3)$ y $\Gamma : x^2 + y^2 = 1$, con N la normal unitaria apuntando hacia afuera.

Solución. Aplicando el teorema de la divergencia tendremos

$$\int_\Gamma F \cdot N \, ds = \int_U \nabla \cdot F \, dA = \int_U (3x^2 + 3y^2) \, dx \, dy$$

siendo $U : x^2 + y^2 \leq 1$. Haciendo el cambio de variable $x = \rho\cos(t)$ e $y = \rho\sin(t)$, para $0 \leq \rho \leq 1$ y $0 \leq t \leq 2\pi$, tendremos

$$\iint_U (3x^2 + 3y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3\rho^2 \rho \, d\rho \, dt = \frac{3\pi}{2}$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente la divergencia de F.
- Asignar (**1 pto**) por obtener la integral $\int_U (3x^2 + 3y^2) \, dx \, dy$, sin necesidad de explicitar quien es U.
- Asignar (**1 pto**) por sugerir el cambio de variable en coordenadas polares.
- Asignar (**1 pto**) por obtener la integral $\int_0^{2\pi} \int_0^1 3\rho^2 \rho \, d\rho \, dt$ o una equivalente. Si un alumno llega hasta acá, debe tener (**4 ptos**).
- Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente la integral $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \rho \, d\rho \, dt$
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor del flujo.

2. Determine la masa de la superficie S dada por la ecuación

$$z = 1 - x^2 - y^2, \qquad z \geq 0$$

con densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Solución. La masa de la superficie S está dada por la integral

$$\iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

Una parametrización para la superficie es

$$\vec{r}(r, t) = (r\cos(t), r\sin(t), 1 - r^2), \qquad r \in [0, 1], \quad t \in [0, 2\pi]$$

En este caso, la normal a la superficie será

$$\vec{r}_r(r, t) \times \vec{r}_t(r, t) = (2r^2\cos(t), 2r^2\sin(t), r)$$

y por tanto su norma

$$\|\vec{r}_r(r, t) \times \vec{r}_t(r, t)\| = r\sqrt{4 + r^2}$$

De este modo, la integral a calcular es

$$\iint_S \rho(x, y, z)\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr\, dt = \frac{1 + 25\sqrt{5}}{60}\pi$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por determinar una parametrización para la superficie.
- Asignar (**1 pto**) por determinar la normal a la superficie asociada a la parametrización dada.
- Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente la norma de la normal.
- Asignar (**1 pto**) por obtener la integral de masa $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r\sqrt{5}\, dr\, dt$ o una equivalente dada la parametrización obtenida. En cualquier caso, para asignar el puntaje deben estar correctos los índices de integración.
- Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente la integral $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r\, dr\, dt$ o su equivalente dada la parametrización escogida.
- Asignar (**1 pto**) por determinar correctamente el valor de la masa.

3. Calcule el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie

$$S : x + y + z = 1, \qquad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$$

con sus normales apuntando hacia el "exterior" (tercera coordenada positiva).

Solución. La integral por calcular es

$$\iint_S F \cdot N \, dS$$

siendo N la normal unitaria a la superficie apuntando hacia el exterior. En este caso,

$$N = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

luego $F \cdot N = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}}$. Usaremos la parametrización cartesiana de la superficie

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, 1-(x+y)) \qquad y \in [0,1],\ x \in [0, 1-y]$$

De este modo, la integral de flujo queda dada por

$$\iint_S F \cdot N \, dS = \iint_S \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} \, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} \, dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \text{Área(S)}$$

Calculamos el área de la superficie (un triángulo con vértices en $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$).

$$\iint_S dS = \iint_U \|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| \, dS = \int_0^1 \int_0^{1-y} \sqrt{3} \, dx \, dy = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, el flujo sobre la superficie S será $\dfrac{1}{2}$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por determinar la normal unitaria a la superficie. También asignar el puntaje si solo se determine la normal exterior.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $F \cdot N$ o bien $F \cdot n$, siendo n una normal exterior.
- Asignar (**2 pto**) por determinar una parametrización de la superficie, incluyendo su dominio. Si solo se entrega la parametrización, asignar (**1 pto**). Es válido que el dominio quede implícito en los índices de integración de la integral.
- Asignar (**2 pto**) por calcular correctamente la integral de superficie. Si el alumno sigue el camino de la pauta, asignar (**1 pto**) por calcular el área de la superficie y (**1 pto**) por concluir el flujo a través de ella.

4. Considere el siguiente campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{y(x-2)}{(1-x)}, \ln(1-x) \right).$$

Calcule $\int_C F \cdot dr$, donde C es la siguiente curva orientada en sentido antihorario:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \leq 0$$

Sugerencia: Use Teorema de Green.

Solución. Para usar el teorema de Green debemos cerrar la curva con el segmento de recta $L : x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$. De este modo, usando el teorema de Green,

$$\oint_{\Gamma \cup (-L)} F \cdot dr = \iint_U (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \iint_U 1\, dx\, dy = \frac{\pi}{2}$$

siendo U el semicírculo: $x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \leq 0$ y, $P(x,y) = \frac{y(x-2)}{(1-x)}$ y $Q(x,y) = \ln(1-x)$.

De lo anterior tendremos,

$$\int_\Gamma F \cdot dr = \frac{\pi}{2} + \int_L F \cdot dr$$

donde

$$\int_L F \cdot dr = \int_L P\, dx + Q\, dy = \int_L Q\, dy = \int_L 0\, dy = 0$$

ya que $x = 0$. Por lo tanto, $\int_C F \cdot dr = \frac{\pi}{2}$.

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por concluir que $Q_x - P_y = 1$.
- Asignar (**2 pto**) por cerrar la curva C con alguna curva de modo que la curva resultante no contenga a $x = 1$ tanto en la curva como en su interior. En caso contrario no se asignará puntaje.

  IMPORTANTE. Todo el puntaje que sigue se asignará únicamente si el alumno cerró la curva. En caso contrario no se asignará puntaje.

- Asignar (**1 pto**) por calcular $\oint_{\Gamma \cup (-L)} F \cdot dr$, para L la curva que haya elegido el alumno.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\int_L F \cdot dr$, para L la curva que haya elegido el alumno.
- Asignar (**1 pto**) por determinar el valor $\int_C F \cdot dr$ a partir de los cálculos anteriores.

5. Considere la superficie S con parametrización

$$\vec{r}(t,s) = (2(\cos(t)+3)\cos(s), 2\sin(t), 2(\cos(t)+3)\sin(s))\,,$$

para $0 \leq s \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcule el área superficial de S.

Solución. El área de la superficie está dada por

$$\iint_S dS = \iint_U \|\vec{r}_t \times \vec{r}_s\|\, dt\, ds$$

siendo U el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Calculando las derivadas parciales,

$$\vec{r}_t(t,s) = (-2\cos(s)\sin(t), 2\cos(t), -2\sin(s)\sin(t))$$
$$\vec{r}_s(t,s) = (-2(3+\cos(t))\sin(s), 0, 2\cos(s)(3+\cos(t)))$$

Luego,

$$\vec{r}_t \times \vec{r}_s = (4\cos(s)\cos(t)(3+\cos(t)), 4(3+\cos(t))\sin(t), 4\cos(t)(3+\cos(t))\sin(s))$$

De este modo,

$$\|\vec{r}_t \times \vec{r}_s\| = 4(3+\cos(t))$$

y por tanto el área de la superficie será

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 4(3+\cos(t))\, dt\, ds = 48\pi^2$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por calcular $\vec{r}_t$ correctamente.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\vec{r}_s$ correctamente.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\vec{r}_t \times \vec{r}_s$ correctamente.
- Asignar (**1 pto**) por calcular $\|\vec{r}_t \times \vec{r}_s\|$ correctamente.
- Asignar (**1 pto**) por escribir correctamente la integral a calcular: $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 4(3+\cos(t))\, dt\, ds$.
- Asignar (**1 pto**) por calcular correctamente el área.

6. Considere el campo $F(x,y,z) = (10xy + 3z^2, 5x^2 + 4y, 6xz)$.

   (a) Demuestre que $\mathbf{rot}\, F = (0,0,0)$.

   (b) Determine una función f tal que $\nabla f = F$.

   (c) Calcule $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r}$ siendo $\Gamma : (1-t, 1+t, t^2)$, para $t \in [0,1]$.

Solución.

(a) Calculemos $\mathbf{rot}\, F$,

$$(\mathbf{rot}\, F)(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 10xy + 3z^2 & 5x^2 + 4y & 6xz \end{vmatrix} = (0-0, 6z - 6z, 10x - 10x) = (0,0,0)$$

(b) Dado que el rotor es cero y que F tiene derivadas parciales continuas, entonces existe f tal que $\nabla f = F$. En otras palabras,

$$f_x(x,y,z) = 10xy + 3z^2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,y,z) = 5x^2y + 3xz^2 + c(y,z)$$

Derivando la igualdad anterior respecto a y tendremos

$$5x^2 + 4y = f_y(x,y,z) = 5x^2 + c_y(y,z) \quad \Longrightarrow \quad c_y(y,z) = 4y \quad \Longrightarrow \quad c(y,z) = 2y^2 + k(z)$$

obteniendo así que $f(x,y,z) = 5x^2y + 3xz^2 + 2y^2 + k(z)$. Derivando esta última expresión respecto a z tendremos que

$$6xz + k'(z) = f_z(x,y,z) = 6xz$$

concluyendo así que $k(z)$ es contantes y por tanto

$$f(x,y,z) = 5x^2y + 3xz^2 + 2y^2 + C$$

con C una constante.

(c) Para calcular $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r}$ usamos el teorema fundamental para integrales de línea,

$$\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} = f(0,2,1) - f(1,1,0) = (8 + C) - (7 + C) = 1$$

Evaluación.

- Asignar (**0.5 pto**) por cada coordenada del rotor cero.
- Asignar (**1 pto**) por obtener $f(x,y,z) = 5x^2y + 3xz^2 + c(y,z)$ o equivalente de acuerdo a cuál variable comienza integrando.
- Asignar (**1 pto**) por obtener que $c(y,z) = 2y^2 + k(z)$ o o equivalente de acuerdo a cuál variable comienza integrando.
- Asignar (**1 pto**) por obtener que $f(x,y,z) = 5x^2y + 3xz^2 + 2y^2 + C$, puede suponer la constante $C = 0$.
- Asignar (**0.5 pto**) por calcular $f(0,2,1)$.
- Asignar (**0.5 pto**) por calcular $f(1,1,0)$.
- Asignar (**0.5 pto**) por calcular $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r}$.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa