Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2019

MAT1630 – Cálculo III

Solución Interrogación N° 1

1. Considere la curva intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 = 2x \qquad \text{e} \qquad z^2 = x^2 + y^2$$

con $z \geqslant 0$. Hallar una parametrización de la curva y la ecuación del plano osculador en el punto $P(1, 1, \sqrt{2})$.

Solución. Completando cuadrado en la primera ecuación vemos que

$$x^2 + y^2 = 2x \Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Luego, podemos elegir funciones coordenadas $x(t) = 1 + \cos(t)$, $y(t) = \operatorname{sen}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Como $z \geqslant 0$ se obtiene que $z(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1 + \cos(t))^2 + \operatorname{sen}^2(t)} = \sqrt{2 + 2\cos(t)}$.
Una parametrización para la curva es $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (1 + \cos(t), \operatorname{sen}(t), \sqrt{2 + 2\cos(t)}) \, .$$

Por otro lado, cuando $t = \pi/2$ se obtiene el punto $P(1, 1, \sqrt{2})$. El vector $\vec{n} = \alpha'(\pi/2) \times \alpha''(\pi/2)$ es paralelo al vector binormal de la curva, ya que $B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), \frac{-\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2 + 2\cos(t)}} \right) \\
\alpha''(t) &= \left(-\cos(t), -\operatorname{sen}(t), \frac{-2\cos(t) - 2\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)}{(2 + 2\cos(t))^{3/2}} \right) \\
\left.\begin{aligned} \alpha'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \left(-1, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \alpha''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \left(0, -1, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}\right\} &\Longrightarrow \vec{n} = \alpha'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \times \alpha''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}, 1\right)
\end{aligned}$$

Entonces, la ecuación del plano osculador en el punto $P(1, 1, \sqrt{2})$ es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1) + (z - \sqrt{2}) = 0 \Longleftrightarrow 2(x-1) + (y-1) + 2\sqrt{2}(z - \sqrt{2}) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{2x + y + 2\sqrt{2}z = 7}.$$

Puntaje Pregunta 1.

- 1 punto por obtener la función coordenada $x(t)$.
- 1 punto por obtener la función coordenada $y(t)$.
- 1 punto por obtener la función coordenada $z(t)$.
- 1 punto por obtener el intervalo del parámetro t.
- 1 punto por obtener un vector normal al plano osculador (puede ser cualquier múltiplo de $\vec{n}$).
- 1 punto por obtener la ecuación del plano.

2. Parametrice por longitud de arco la curva polar $r = 1 + \cos\theta$, con parámetro $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Solución. Tenemos que

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1+\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 2 + 2\cos\theta = 4\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) .$$

Entonces, la función longitud de arco de la curva polar es

$$s(t) \;=\; \int_{-\pi}^{t} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 2\int_{-\pi}^{t} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\, d\theta = 2\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_{-\pi}^{t} = 4\left[\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + 1\right] .$$

Notemos que

$$r = s(t) \Longleftrightarrow r = 4\left[\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + 1\right] \Longleftrightarrow \frac{r}{4} - 1 = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \Longleftrightarrow t = 2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{r-4}{4}\right) .$$

Entonces, la función inversa de la función longitud de arco es $\varphi(s) = 2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{s-4}{4}\right)$. Se sigue que, la parametrización por longitud de arco de la curva polar es

$$\alpha(s) = (f(\varphi(s))\cos\varphi(s), f(\varphi(s))\operatorname{sen}\varphi(s)) ,$$

donde $f(\theta) = 1 + \cos\theta$.

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por obtener el valor de $r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$.
- 2 puntos por obtener la función longitud de arco $s(t)$.
- 2 puntos por obtener la función inversa de la función longitud de arco $\varphi(s)$.

3. Demostrar que la curva de ecuación paramétrica

$$x = 3t^2 + 2t + 1\,, \qquad y = t^2 - 2t + 3\,, \quad z = 5t^2 - t - 2$$

es plana y encuentre la ecuación del plano que la contiene.

Solución. Para probar que la curva es plana, basta probar que la torsión de la curva es cero para todo t. Tomando $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (6t + 2, 2t - 2, 10t - 1) \\ \alpha''(t) &= (6, 2, 10) \\ \alpha'''(t) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Es sencillo ver que $(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t) = 0$ entonces $\tau(t) = \dfrac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = 0$ para todo t y luego la curva es plana. Además, como la curva es plana está contenida en el plano osculador y se tiene que el vector

$$\vec{n} = \alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6t + 2 & 2t - 2 & 10t - 1 \\ 6 & 2 & 10 \end{vmatrix} = (-18, -26, 16)\,.$$

es perpendicular al plano osculador. Entonces, la ecuación del plano en donde la curva está contenida tiene vector normal $\vec{n}$ y pasa por el punto $\alpha(0) = (1, 3, -2)$ es

$$-18(x - 1) - 26(y - 3) + 16(z + 2) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{9x + 13y - 8z = 61}$$

Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por calcular la torsión de la curva y obtener que $\tau(t) = 0$ para todo t.
- 2 puntos por obtener un vector normal al plano osculador (puede ser cualquier múltiplo de $\vec{n}$).
- 2 puntos por obtener la ecuación del plano en donde está contenida la curva.

4. Un automovilista se desplaza por una carretera recta. En el instante $t = 0$ llega a una rotonda la que recorre con una trayectoria

$$\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t(2-t)) \,, \qquad t \in [0,2]$$

En el instante $t = 2$ sale de la rotonda y vuelve a continuar por una carretera recta.

a) Calcule la curvatura máxima de la rotonda para $t \in [0,2]$, ¿en qué punto ocurre?

b) Determine la torsión de la rotonda para $t \in [0,2]$. Haga un gráfico de la torsión en función del tiempo.

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2-2t) \\
\alpha''(t) &= (-\cos t, -\operatorname{sen} t, -2) \\
\alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (-2\cos t - (2-2t)(-\operatorname{sen} t), -(2\operatorname{sen} t + (2-2t)\cos t), \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) \\
&= (-2\cos t + 2\operatorname{sen} t - 2t \operatorname{sen} t, -2\operatorname{sen} t - 2\cos t + 2t\cos t, 1) \\
\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2 &= 4\cos^2 + 4\operatorname{sen}^2 t + 4t^2 \operatorname{sen}^2 t - 8\operatorname{sen} t \cos t + 8t \operatorname{sen} t \cos t - 8t \operatorname{sen}^2 t \\
&\qquad + 4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 4t^2 \cos^2 t + 8\operatorname{sen} t \cos t - 8t \operatorname{sen} t \cos t - 8t\cos^2 t + 1 \\
&= 9 - 8t + 4t^2 \\
\|\alpha'(t)\|^2 &= \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + (2-2t)^2 = 5 - 8t + 4t^2
\end{aligned}$$

Entonces, la curvatura de la curva para $t \in [0,2]$ es

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{9-8t+4t^2}}{(5-8t+4t^2)^{3/2}} \,.$$

Sea $p = p(t) = 9 - 8t + 4t^2$ y $q = q(t) = 5 - 8t + 4t^2$. Entonces, $\kappa(t) = p^{1/2} q^{-3/2}$ y la derivada de la función curvatura es

$$\kappa'(t) = \frac{1}{2} p^{-1/2}(-8+8t) q^{-3/2} - \frac{3}{2} p^{1/2} q^{-5/2}(-8+8t) = 4(-1+t)[p^{1/2} q^{-3/2} - 3p^{1/2} q^{-5/2}] \,.$$

Luego $t = 1$ es punto crítico de κ que es un máximo global y se alcanza en el punto $\alpha(1) = (\cos(1), \operatorname{sen}(t), 1)$.

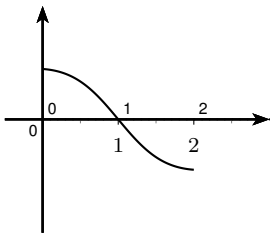
b) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha'''(t) &= (\operatorname{sen} t, -\cos t, 0) \\
(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t) &= \operatorname{sen} t(-2\cos t + 2\operatorname{sen} t - 2t \operatorname{sen} t) - \cos t(-2\operatorname{sen} t - 2\cos t + 2t\cos t) \\
&= -2\operatorname{sen} t \cos t + 2\operatorname{sen}^2 t - 2t \operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t + 2\cos^2 t - 2t\cos^2 t \\
&= 2 - 2t
\end{aligned}$$

Entonces, la torsión de la curva para $t \in [0,2]$ es

$$\tau(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{2-2t}{9-8t+4t^2} \,.$$

A continuación se aprecia el gráfico de la función τ



Puntaje Pregunta 4.

- 2 puntos por obtener la curvatura de la curva.
- 1 punto por obtener que en $t = 1$ hay un máximo para la curva.
- 2 puntos por obtener la torsión de la curva.
- 1 punto por obtener la gráfica de la torsión en el intervalo $[0, 2]$.