MAT–1630 - CALCULO III
RESOLUCION INTERROGACIÓN 1
Primer Semestre 2018

Todas las preguntas tiene 1.0 punto base.

1. Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.

3 pts.(a) Encuentre una parametrización para la curva $\mathcal{C}$.

3 pts (b) Determine los puntos en la curva donde la curvatura es máxima y es mínima.

Solución: Parte(a)

Por la simetría del cilindro aplicamos coordenadas cilíndricas $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\text{sen}\,\theta, z)$ con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Las ecuaciones cartesianas se transforman en

$$x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow r^2 = 1\,, \quad x + y = 1 \Longrightarrow z = 1 - r\cos\theta$$

Luego, $r = 1$, y entonces una parametrización de la curva es

$$r(\theta) = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1 - \cos\theta)\,, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\,.$$

Solución: Parte (b)

La curvatura en $r(\theta)$ se calcula con la fórmula

$$\kappa(\theta) = \frac{|r'(\theta) \times r''(\theta)|}{|r'(\theta)|^3}$$

Calculando se obtiene que $r'(\theta) \times r''(\theta) = (1, 0, 1)$.

Además $r'(\theta) = (-\text{sen}\,\theta\,,\, \cos\theta\,,\, \text{sen}\,\theta)$.

En resumen,

$$\kappa(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{(1 + \text{sen}^2\,\theta)^{3/2}}$$

Luego el máximo de la curvatura es $\sqrt{2}$ y se logra en $\theta = 0$ y en $\theta = \pi$, es decir, en los puntos $r(0) = (1, 0, 0)$ y $r(\pi) = (-1, 0, 2)$.

Luego el mínimo de la curvatura es $1/2$ y se logra en $\theta = \pi/2$ y en $\theta = 3\pi/2$, es decir, en los puntos $r(\pi/2) = (0, 1, 1)$ y $r(3\pi/2) = (0, -1, 1)$.

2. Considere la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$r(t) = (\sqrt{2t+1}\cos(\pi t)\,,\ \sqrt{2t+1}\,\mathrm{sen}(\pi t)\,,\ t\,\sqrt{2\pi}), \quad t \geq 0.$$

3 pts.(a) Calcule la ecuación cartesiana de la recta en $\mathbb{R}^3$ tangente a la curva en el punto $(-\sqrt{3}\,, 0,\ \sqrt{2\pi})$.

3 pts.(b) Calcule la función longitud de arco $s(t)$ de Γ.

Solución: Parte (a)

Observemos que el punto pedido se logra para $t = 1$, esto es , $r(1) = (-\sqrt{3}\,, 0,\ \sqrt{2\pi})$.

El vector tangente a la curva Γ en el punto $r(1)$ está dada por $r'(1)$,

$$r'(t) = \left[\tfrac{1}{\sqrt{2t+1}}\cos(\pi t) - \pi\sqrt{2t+1}\,\mathrm{sen}\,(\pi t),\quad \tfrac{1}{\sqrt{2t+1}}\,\mathrm{sen}\,(\pi t) + \sqrt{2t+1}\cos(\pi t),\quad \sqrt{2\pi}\right]$$

De esta forma se obtiene que

$$r'(1) = \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad -\pi\sqrt{3}\,,\quad \sqrt{2\pi}\right]$$

La ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva es

$$(-\sqrt{3}\,, 0,\ \sqrt{2\pi}\,) + \tau r'(1) = \left[-\sqrt{3} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\tau\,,\quad -\pi\sqrt{3}\,\tau\,,\quad \sqrt{2\pi}(1+\tau)\right]$$

Ecuación cartesiana de la recta tangente : si llamamos $y = -\pi\sqrt{3}\,\tau$ lo cual resulta las igualdades siguientes:

$$3\pi(x+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{6\pi}}{2}\,(z - \sqrt{2\pi}) = y\,.$$

Parte (b)

La longitud de arco está dada por $s(t) = \int_0^t \|r'(u)\|\,du$. Calculemos la rapidez, $\|r'(u)\|$

$$\begin{aligned}\|r'(u)\|^2 &= \left(\frac{1}{2u+1}\,(1 + \pi^2\,(2u+1)^2) + 2\pi\right)\\ &= \frac{1}{2u+1}\,(\,\pi(2u+1)+1)^2\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$s(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2u+1}}\,(\,\pi(2u+1)+1)\,du\,.$$

Calculando las integrales se obtiene que:

$$s(t) = \frac{1}{2}\,\left(-2 + 2\sqrt{1+2t}\right) + \frac{\pi}{2}\left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1+2t)^{3/2}\right)\,.$$

Simplificando, $s(t) = \left(-1 + \sqrt{1+2t}\right) + \frac{\pi}{3}\left(-1 + (1+2t)^{3/2}\right)$

3. Considere la curva γ parametrizada por $r(t) = (t+2\,, 1-t\,, \frac{1}{2}\,t^2)$ con $-\infty < t < \infty$.

3 pts.(a) Demuestre que el plano osculador en cualquier punto en la curva es el mismo.

3 pts.(b) Calcule la torsión $\tau(s)$ de γ.

Solución: Parte (a)

El vector normal al plano osculador en $t = t_0$ tiene la dirección del vector

$$r'(t_0) \times r''(t_0) = (-1, -1, 0)\,.$$

Luego la normal es independiente de t_0. Por lo tanto la ecuación del plano osculador es:

$$[(x, y, z) - r(t_0)] \cdot (-1, -1, 0) = 0$$

es decir,

$$\left[x - (t_0 + 2)\,, \quad y - (1 - t_0)\,, \quad z - \tfrac{1}{2}t_0^2\right] \cdot (-1, -1, 0) = 0 \Longrightarrow x + y = 3\,.$$

Luego, el plano osculador en cualquier punto de la curva es siempre el mismo y es $x + y = 3$.

Solución: Parte (b)

Puesto que el plano oscular es el mismo para todo punto de la curva se concluye que la curva es plana, es decir ella no sale del plano $x + y = 3$. Por lo tanto, su torsión $\tau(s) = 0$ para todo s.

4. Sea γ la curva plana dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \theta$, y considere los puntos P_k en γ correspondientes a los valores $\theta_k = 2k\pi + \pi/2$, $k = 0, 1, 2, ...$ Pruebe que el trabajo del campo $\vec{F}(x, y) = (xy, y^2)$ a lo largo de γ entre puntos consecutivos P_k, P_{k+1} es una constante independiente de k.

Solución:

Por inspección se observa que los puntos tienen la representación

$$\begin{aligned}(x, y) &= (0, (4k-3)\pi/2) \Longleftrightarrow \theta_1 = (4k-3)\pi/2 \\ (x, y) &= (0, (4k+1)\pi/2) \Longleftrightarrow \theta_2 = (4k+1)\pi/2\end{aligned}$$

En coordenadas polares, usando que la curva tiene por ecuación $\rho = \theta$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}x = \rho\, \cos\theta = \theta\cos\theta \quad &\Longrightarrow dx = (\cos\theta - \theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,)\, d\theta \\ y = \rho\, \mathrm{sen}\,\theta = \theta\mathrm{sen}\,\theta \quad &\Longrightarrow dy = (\mathrm{sen}\,\theta + \theta\, \cos\theta\,)\, d\theta\end{aligned}$$

El trabajo realizado por la fuerza F a lo largo de la curva γ es la integral de línea

$$\int_\gamma \vec{F}(x, y) d\gamma = \int_\gamma F_1(x, y)\, dx + F_2(x, y)\, dy = \int_\gamma xy\, dx + y^2\, dy$$

Reemplazando, el trabajo realizado por la fuerza F a lo largo de la curva γ es

$$\begin{aligned}T &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\theta^2 \mathrm{sen}\,\theta\, \cos\theta\, (\cos\theta - \theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + \theta^2 \mathrm{sen}^2\,\theta\, (\mathrm{sen}\,\theta + \theta\, \cos\theta)\, \right) d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \theta^2\, \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\end{aligned}$$

La integral indefinida se calcula por integración por partes:

$$\int \theta^2\, \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = -\theta^2 \cos\theta + 2\theta\mathrm{sen}\,\theta + 2\cos\theta$$

Evaluando se obtiene que

$$T = (\theta_2 - \theta_1) = 4\pi$$

Lo cual prueba que el trabajo realizado por la fuerza es una constante $(4\pi\ )$ independiente de k.