PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Temporada Académica de Verano 2023

CÁLCULO III - MAT1630
EJERCICIOS CAPÍTULO 2

Clase 7 y 8: Integrales de Línea

1. Sea C la curva dada por $x^2 + y^2 = 1$, $x \leqslant 0$ orientada positivamente. Encontrar el trabajo realizado por la fuerza
$$F(x, y) = \left(y\frac{x-2}{1-x}, \ln(1-x) \right)$$
al mover una partícula a lo largo de la curva C.

2. Si C es el triángulo con vértices el origen, el punto $(4, 0)$ y el punto $(0, 3)$ recorrido en sentido antihorario, calcule $\displaystyle\int_C (x^2 + xy)ds$.

3. Halle el trabajo realizado por la fuerza $F(x, y, z) = (2x-y+z, x+y-z^2, 3x-2y+4z)$ al desplazar una partícula en el sentido antihorario alrededor de la elipse
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1\,, \quad z = 0\,.$$

4. Considere C una curva suave parametrizada por longitud de arco $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funciones definidas en $[a, b]$ con dos derivadas continuas, $a < b$. Calcule
   (a) $\displaystyle\int_C \mathbf{r}'' \cdot d\mathbf{r}$
   (b) $\displaystyle\int_C \mathbf{r}' \times \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}$

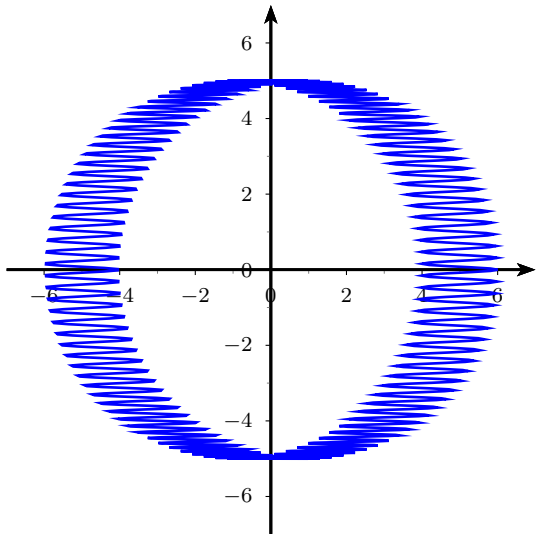
5. Considere el campo de fuerzas $F(x, y, z) = (x - y, y + z, z - x)$. Calcule la integral de trabajo
$$\int_\Gamma F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$
siendo Γ la curva de segmentos de recta que une los puntos $(0, 0, 0) \to (1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \to (1, 1, 1)$.

6. Determine el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x,y) = x\mathbf{i}+(y+2)\mathbf{j}$ al mover un objeto a lo largo de un arco de la cicloide $r(t) = (t - \text{sen}(t))\mathbf{i} + (1 - \cos(t))\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

7. Considere el campo

$$\vec{F}(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{si } (x,y) = 0, \end{cases}$$

y la curva λ parametrizada por $\lambda(t) = (5\cos(t) + \cos(100t), 5\,\text{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$, graficada abajo. Calcule $\int_\lambda \vec{F} \cdot d\vec{\lambda}$.



Clase 8 y 9: Campos conservativos

1. Calcule la integral del campo vectorial

$$F(x,y,z) = (ye^{xy} + 2xe^y, xe^{xy} + x^2e^y, 2ze^z + z^2e^z)$$

sobre la curva $r(t) = (2\cos(t), \sin^2(t), \cos(2t))$, con $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

2. Considere el siguiente campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}\right).$$

(a) Calcule $\int_{C_1} F \cdot dr$, donde C_1 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$

(b) Calcule $\int_{C_2} F \cdot dr$, donde $C_1\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^2 + y^2 = 4\}$

3. Calcule la integral de línea en las siguientes curvas:

$$\int_{\gamma} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy\ .$$

(a) γ es la poligonal que une los puntos $(0,1)$ y $(2,4)$ compuesta por el trazo rectilíneo que une $(0,1)$ con $(1,1)$ y el trazo rectilíneo que une $(1,1)$ con $(2,4)$.

(b) γ es la curva que une los puntos $(0,1)$ con $(2,4)$ parametrizada por : $\phi(t) = (2t, 1 + 3\,\mathrm{sen}(\pi t/2))$ con $0 \leqslant t \leqslant 1$.

4. (a) Calcule el valor de la integral de línea siguiente:

$$\int_{C} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

con C es la parte del arco $y = 2x^2 - 1$ que parte de $(1,1)$ y termina en $(0,-1)$.

(b) Calcule el valor de la integral de línea $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$$

y γ es una curva suave cerrada simple que encierra $(0,0)$ recorrida en sentido antihorario.

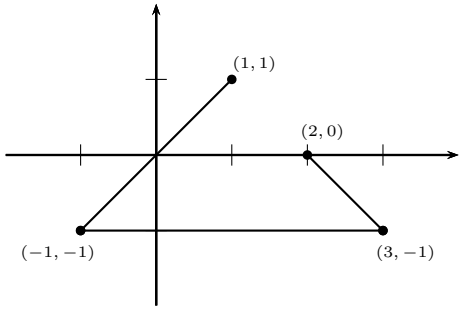
5. Calcule el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F} = (P,Q)$ donde

$$P(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2} + x^3\ , \qquad Q(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + y^4\ ,$$

sobre una partícula de masa m que se desplaza en el semiplano superior en la curva que comienza con el segmento rectilíneo desde $(-1,1)$ hasta $(-2,0)$, luego por la curva $y = \sqrt{4-x^2}$ hasta el punto $(2,0)$ y luego por un segmento rectilíneo hasta el punto $(2,2)$.

6. Considere el campo vectorial

$$F(x,y) = (y\cos(x)+\sin(y)+1, \sin(x)+x\cos(y))$$



   (a) Determine si F es o no un campo conservativo.

   (b) Calcule $\int_C F\cdot d\vec{r}$ donde C es la curva que va desde $(1,1)$ hasta $(2,0)$, dada en la siguiente figura:

7. Calcular

$$\int_\Gamma -y\,dx + x\,dy$$

   siendo Γ la curva astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

8. Calcular

$$\int_\Gamma \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dy + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz$$

   siendo Γ la curva paramétrica $(t\cos(t), t\sin(t), t)$ con $t\in[\pi, 2\pi]$.

9. Considere el campo de vectores

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + xe^{-y^2}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2ye^{-y^2}\right)\hat{\jmath}.$$

   Se define $f(x,y) = \int\limits_C F\cdot dr$ donde C es cualquier curva simple (no cerrada) que va desde $(0,0)$ hasta cualquier punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

   (a) Calcule $f(x,y)$. (4 puntos)

   (b) Verifique que $\nabla f = F$. (2 puntos)

Clases 10 y 11: Teorema de Green

1. Sea $F(x,y) = (2xy^2+1, 2x^2y+3x)$ campo vectorial. Calcule $\int\limits_C F\cdot dr$, donde C consiste en tres segmentos de recta que van desde $(3,0)$ a $(3,2)$; desde $(3,2)$ a $(1,4)$ y desde $(1,4)$ a $(1,0)$.

2. Sea $F(x,y,z) = (x,y,z)r^2$ donde $r = \|(x,y,z)\|$ y sea g una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Calcule $\text{rot}(\text{div}(F)\nabla g)$ en término de las derivadas parciales de g.

3. Sea C una curva en $\mathbb{R}^2$ cerrada, simple, orientada en sentido antihorario, parametrizada por $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$. Se define el número de giros de C con respecto al punto $p = (0,1)$ (no situado sobre la curva C) como:

$$W(C,p) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{x\,dy - (y-1)\,dx}{x^2 + (y-1)^2}\,.$$

   (a) Demuestre que $W(C,p) = 0$ si p está en la región exterior a C.

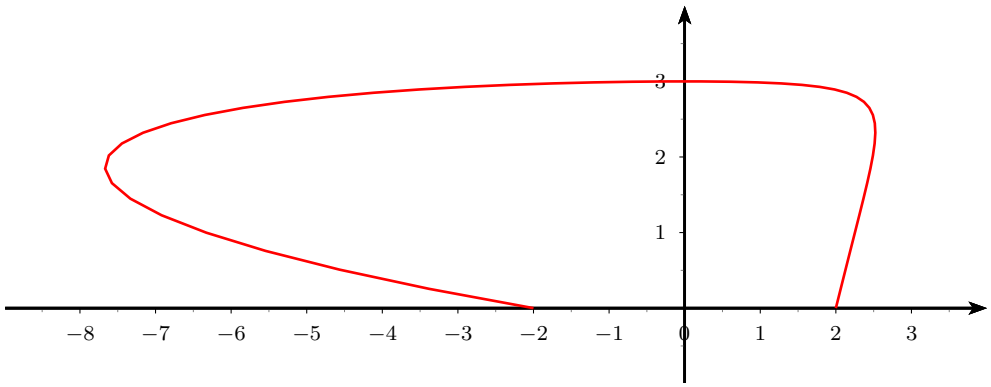
   (b) Demuestre que $W(C,p) = 1$ si p está en la región interior a C.

4. Sea γ el cardioide $r = 1 + sen\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$. Calcular $\displaystyle\int_\gamma y^2 dx$, si γ se recorre en sentido positivo.

5. Considere $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la curva parametrizada como

$$r(t) = (\cos(t)(2 + \text{sen}(t)e^t), \text{sen}(t)(3 + \cos^2(t))) \qquad t \in [0, \pi]\,,$$

graficada abajo.



Calcule la integral de trabajo $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F}$ es el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \left(3 - \frac{y}{x^2+y^2}, 2 + \frac{x}{x^2+y^2}\right)\,.$$

6. Considere el campo $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es

(a) la circunferencia centrada en el origen de radio $\frac{1}{2}$ con orientación positiva (contra manecillas del reloj).

(b) el hexágono regular centrado en el origen orientado en forma positiva con un vértice en $(1, 0)$.

7. Calcular la integral de línea

$$\int_{\Gamma} (2xy^2 + y)dx + (2x^2y + x + x^2/2)dy$$

siendo Γ la curva $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geq 0$, recorrida en sentido antihorario.

8. Calcule el área en el plano encerrada por la curva: $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \text{sen}(2t)$ para $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

9. Sea $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\overrightarrow{F}(x,\ y) = (e^{xy}(1 + xy),\ x^2 + e^{y^2} + x^2e^{xy})$.

Encontrar $\int_{\lambda} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\lambda}$ si λ recorre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$ en sentido antihorario.