Pontificia Universidad Católica de Chile – Facultad de Matemáticas

MAT1630 – Cálculo III – Interrogación 2

PAUTA DE SOLUCIONES

1. Considere la función $f(x,y) = x^2 - x + y^4/2$.
   (a) Calcular el valor máximo y el valor mínimo de la función sujeta a la restricción $x^2+y^2 = 1$ utilizando el método de Lagrange.
   (b) ¿Cuál es el valor máximo y el valor mínimo de la función si ahora consideramos los puntos $x^2 + y^2 \leq 1$?.

Solución:

(a) Consideremos la función $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. El método de Lagrange establece que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$. Entonces tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 2x\lambda \quad (1)\\ 2y^3 &= 2y\lambda \quad (2)\\ x^2 + y^2 &= 1\,. \quad (3) \end{aligned}$$

De (2) y (3) tenemos que si $y = 0$ entonces obtenemos los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$. Si $y \neq 0$ se sigue que $x^2 + \lambda = 1$. Reemplazando en (1) obtenemos $2x^3 - 1 = 0$, de donde se obtiene que $x = 1/\sqrt[3]{2}$ y entonces $y^2 = 1 - (1/\sqrt[3]{2})^2$. Por lo tanto, los puntos son $\left(1/\sqrt[3]{2}, \sqrt{1-(1/\sqrt[3]{2})^2}\right)$ y $\left(1/\sqrt[3]{2}, -\sqrt{1-(1/\sqrt[3]{2})^2}\right)$.

Note que $f(1,0) = 0\,, f(-1,0) = 2$ y

$$f\left(1/\sqrt[3]{2}, -\sqrt{1-(1/\sqrt[3]{2})^2}\right) = f\left(1/\sqrt[3]{2}, \sqrt{1-(1/\sqrt[3]{2})^2}\right) = -0{,}09.$$

Así en los puntos $\left(1/\sqrt[3]{2}, \sqrt{1-(1/\sqrt[3]{2})^2}\right)$ y $\left(1/\sqrt[3]{2}, -\sqrt{1-(1/\sqrt[3]{2})^2}\right)$ f tiene un mínimo, cuyo valor es -0.09, y en $(-1,0)$ un máximo cuyo valor es 2.

(b) Para los puntos $x^2 + y^2 < 1$ calculamos los puntos críticos de f, es decir, los puntos tales que $\nabla f(x,y) = 0$ y $x^2 + y^2 < 1$. $\nabla f(x,y) = (2x - 1, 2y^3)$ así el punto crítico es $(1/2, 0)$. Entonces los puntos críticos de f restringidos a $x^2 + y^2 \leq 1$ son $(1,0)\,, (-1,0)$, $\left(1/\sqrt[3]{2}, \sqrt{1-(1/\sqrt[3]{2})^2}\right)$, $\left(1/\sqrt[3]{2}, -\sqrt{1-(1/\sqrt[3]{2})^2}\right)$ y $(1/2, 0)$. Como $f(1/2,0) = -1/4 = -0{,}25$, en el punto $(1/2,0)$ f alcanza el mínimo, cuyo valor es $-\frac{1}{4}$, y en el punto $(-1,0)$ alcanza el máximo, cuyo valor es 2, en la región considerada.

Total: 1 punto

2. (a) Escriba en una sola integral $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^3 \int_0^{(3-x)/2} f(x,y)\,dy\,dx$ cambiando el orden de integración.

Solución: Note que la región de integración es

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 3\,,\ 0 \le y \le (3-x)/2\}\,,$$

y puede ser escrita como

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\,,\ y^2 \le x \le 3 - 2y\}\,.$$

Entonces la integral puede ser escrita como $\int_0^1 \int_{y^2}^{3-2y} f(x,y)\,dx\,dy$.

Total: 1 punto

(b) Escriba la integral iterada $\int_0^{\sqrt{4/3}} \int_{y^2}^{y^2/4+1} \int_0^{y^2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$ como integral iterada en el orden $dx\,dy\,dz$.

Solución: Note que la región de integración es

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le y \le \sqrt{4/3}\,,\ y^2 \le x \le y^2/4 + 1\,,\ 0 \le z \le y^2\}$$

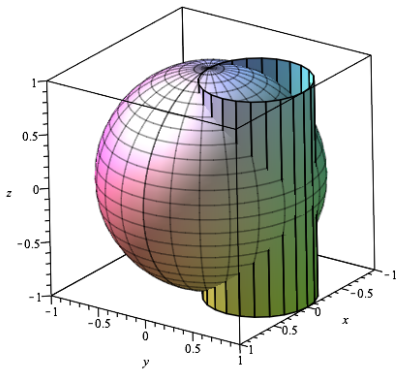
y puede ser escrita como

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 4/3\,,\ \sqrt{z} \le y \le \sqrt{4/3}\,,\ y^2 \le x \le y^2/4 + 1\}\,.$$

Así la integral puede ser escrita como $\int_0^{4/3} \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{4/3}} \int_{y^2}^{y^2/4+1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Total: 1 punto

3. Sea S el sólido que está al interior de la esfera de radio 1 y centro $(0,0,0)$ y a la vez dentro del cilindro circular de radio $1/2$ y centro $(0,1/2,0)$ como muestra la figura.



Sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función continua. Escriba la integral $\iiint_S f(x,y,z)\,dV$ como integral iterada en coordenadas cilíndricas.

Solución: En coordenadas cilíndricas los puntos de la esfera llena son

$$E = \{(r, \theta, \phi) \mid 0 \leq r \leq 1\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,\ -\sqrt{1-r^2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\}\,,$$

y los puntos en el cilindro lleno son

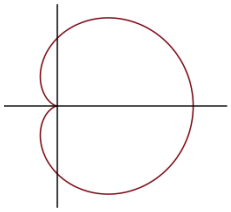
$$C = \{(r, \theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq \pi\,,\ 0 \leq r \leq \operatorname{sen}(\theta)\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,\ z \in \mathbb{R}\}\,.$$

Así la integral en $S = E \cap C$ puede ser escrita como

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$$

Total: 1 punto

4. Considere el cardioide dado por coordenadas polares $r = 1 + cos(\theta)$.



Use integrales dobles para calcular el área al interior del cardioide en el primer cuadrante.

Solución: La región en el pimer cuadrante del cardioide es

$$C = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2\,,\ 0 \leq r \leq 1 + \cos(\theta)\}\,.$$

Así el área es

$$\begin{aligned}
\iint_C 1\, dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{1+\cos(\theta)} r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\big(1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\big) d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Total: 1 punto

5. Calcular el volumen dentro del sólido R definido de la siguiente manera:

$$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}\right\}\,.$$

Solución: Nótese que las ecuaciones $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$ y $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$ definen conos con ambos vértices en el origen y sus ejes centrales son el eje z. Si proyectamos estos conos en el plano $y = 0$ vemos que el ángulo de inclinación respecto al eje z de cada cono satisfacen que $\tan(\phi_1) = 1/\sqrt{3}$ y $\tan(\phi_2) = \sqrt{3}$, donde ϕ_1 es el ángulo asociado al cono $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$ y ϕ_2 de el otro; luego $\phi_1 = \pi/6$ y $\phi_2 = \pi/3$. Escribimos el sólido en coordenadas esféricas

$$R = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 2\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,\ \pi/6 \leq \phi \leq \pi/3\}\,.$$

Por lo tanto el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}
\iiint_R 1\, dV &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi\, d\theta\, d\rho \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) d\theta\, d\rho \\
&= \int_0^2 2\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) \rho^2\, d\rho \\
&= \frac{8}{3}\pi(\sqrt{3} - 1)
\end{aligned}$$

Total: 1 punto