FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

**Interrogación 2**
**MAT1630 - Cálculo III**

**Instrucciones:**

- Cada problema vale 60 puntos. La distribución se indica en cada parte.
- Justifica cada paso. Simplifica algebraicamente siempre que sea posible.
- **En caso de ser sorprendido con un celular, tablet u otro dispositivo electrónico durante la prueba, esta será evaluada con nota mínima.**
- Duración: 120 minutos.

---

1. Considera el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = \left\langle \frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2} \right\rangle,$$

definido en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(a) **(15 pts)** Verifica que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ en $U$.

(b) **(15 pts)** Calcula directamente

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

donde $C$ es la circunferencia unitaria $x^2+y^2=1$ recorrida en sentido antihorario. Concluye que $\mathbf{F}$ *no es conservativo* en $U$ y explica por qué esto no contradice (a).

(c) **(15 pts)** Considera el semiplano $H = \{(x,y) : x > 0\}$. Encuentra una función potencial $f$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$ en $H$.
*Indicación*: $\dfrac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(d) **(15 pts)** Sea $\Gamma$ una curva suave contenida en $H$ que va desde $(1,-1)$ hasta $(1,1)$. Calcula $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

**Solución:**

(a) **(15 pts)** $P = -y/(x^2+y^2)$, $Q = x/(x^2+y^2)$. Por la regla del cociente,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)-(-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Coinciden en $U$. *Puntaje*: cálculo de cada derivada (5 pts c/u), igualdad explícita (5 pts).

(b) **(15 pts)** Parametrizamos $C:\ \mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t\rangle$, $t \in [0, 2\pi]$, con $\mathbf{r}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t\rangle$. Sobre $C$, $x^2+y^2 = 1$, así que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t\rangle$.

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi.$$

Si $\mathbf{F}$ fuera conservativo en $U$, la integral sobre toda curva cerrada sería 0. Como $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi \neq 0$, $\mathbf{F}$ no es conservativo en $U$.
Esto no contradice (a): la condición $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ garantiza la existencia de potencial *solo en regiones simplemente conexas*, y $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no lo es (tiene un agujero en el origen).
*Puntaje*: parametrización (4 pts), cálculo correcto $= 2\pi$ (6 pts), conclusión con justificación de simple conexidad (5 pts).

(c) **(15 pts)** Buscamos $f$ con $f_x = -y/(x^2+y^2)$ y $f_y = x/(x^2+y^2)$. Por la indicación, $\dfrac{\partial}{\partial y}\arctan(y/x) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, lo que sugiere $f(x,y) = \arctan(y/x) + g(x)$. Derivando respecto de $x$:

$$f_x = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} + g'(x) = \frac{-y}{x^2+y^2} + g'(x).$$

Igualando con $-y/(x^2+y^2)$ obtenemos $g'(x) = 0$, luego $g$ es constante. Tomamos

$$\boxed{f(x,y) = \arctan(y/x)},$$

bien definida y de clase $C^1$ en $H = \{x > 0\}$ (que es simplemente conexo, lo que justifica la existencia del potencial).
*Puntaje*: planteamiento usando indicación (5 pts), determinar $g$ (5 pts), función potencial correcta (5 pts).

(d) **(15 pts)** Como $H$ es simplemente conexo y $\mathbf{F} = \nabla f$ en $H$, por el TFC para integrales de línea

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(1,1) - f(1,-1) = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

*Puntaje*: invocar TFC y mencionar independencia de trayectoria (5 pts), evaluar $f$ en los extremos (5 pts), resultado (5 pts).

2. Considera la hélice $C$ parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t\rangle, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

y el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle -y,\ x,\ z\rangle$.

(a) **(15 pts)** Calcula $|\mathbf{r}'(t)|$ y la longitud de $C$.

(b) **(15 pts)** Calcula la integral de línea del campo escalar $g(x, y, z) = z$ a lo largo de $C$, es decir, $\displaystyle\int_C g\, ds$.

(c) **(15 pts)** Calcula el trabajo $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(d) **(15 pts)** Calcula el rotacional rot $\mathbf{F}$. ¿Es $\mathbf{F}$ conservativo en $\mathbb{R}^3$? Justifica.

**Solución:**

(a) **(15 pts)** $\mathbf{r}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 1\rangle$. $|\mathbf{r}'(t)|^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1 = 2$, luego $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$ (constante).

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

*Puntaje*: $\mathbf{r}'$ (4 pts), $|\mathbf{r}'|$ simplificado (5 pts), longitud (6 pts).

(b) **(15 pts)** Sobre $C$, $z = t$, así que

$$\int_C z\, ds = \int_0^{2\pi} t \cdot \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\,\frac{(2\pi)^2}{2} = 2\sqrt{2}\,\pi^2.$$

*Puntaje*: $z = t$ y planteamiento (5 pts), $|\mathbf{r}'| = \sqrt{2}$ usado correctamente (5 pts), cálculo (5 pts).

(c) **(15 pts)** $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, t\rangle$.

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + t = 1 + t.$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (1 + t)\, dt = 2\pi + 2\pi^2.$$

*Puntaje*: $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ (4 pts), producto punto y simplificación (5 pts), integración y resultado (6 pts).

(d) **(15 pts)**

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & z \end{vmatrix} = \langle 0 - 0,\ 0 - 0,\ 1 - (-1)\rangle = \langle 0, 0, 2\rangle.$$

Como rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{F}$ *no es conservativo* en $\mathbb{R}^3$ (un campo conservativo de clase $C^1$ tiene rotor nulo).

*Puntaje*: cálculo del rotor con determinante o componente a componente (10 pts), conclusión con justificación (5 pts).

3. Sea $D$ el disco unitario $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $C = \partial D$ la circunferencia unitaria orientada en sentido antihorario. Considera el campo en $\mathbb{R}^3$

$$\widetilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = \langle\, x^2 - y,\ \ x + y^2,\ \ xy\,\rangle,$$

y denotamos $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 - y,\ x + y^2\rangle$ su parte planar (las dos primeras componentes).

(a) **(20 pts)** Calcula el rotacional rot $\widetilde{\mathbf{F}}$ en $\mathbb{R}^3$. Luego aplica el Teorema de Green en su forma vectorial,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \widetilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{k}\, dA,$$

para calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de $C$.

(b) **(25 pts)** Aplica el Teorema de Green en su forma de divergencia (flujo exterior) para calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través de $C$,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \text{div } \mathbf{F}\, dA,$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a $D$ y div $\mathbf{F} = P_x + Q_y$ con $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$.

(c) **(15 pts)** Verifica el resultado de (b) calculando $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ *directamente* a partir de la parametrización de $C$.

**Solución:**

(a) **(20 pts)** Con $\widetilde{\mathbf{F}} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle = \langle x^2 - y,\ x + y^2,\ xy \rangle$,

$$\text{rot } \widetilde{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 - y & x + y^2 & xy \end{vmatrix} = \langle x - 0,\ -(y - 0),\ 1 - (-1) \rangle = \langle x,\ -y,\ 2 \rangle.$$

Entonces $(\text{rot } \widetilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{k} = 2$. Por la forma vectorial del Teorema de Green,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D 2\, dA = 2 \cdot \text{área}(D) = 2\pi.$$

*Puntaje*: cálculo del rotor con sus tres componentes (10 pts), $(\text{rot } \widetilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{k} = 2$ (4 pts), área del disco y resultado (6 pts).
*Observación*: las componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ del rotor $(x, -y)$ no intervienen en este cálculo: la forma vectorial de Green proyecta el rotor en la dirección normal al plano de $D$.

(b) **(25 pts)** La divergencia (en el plano) es

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2x + 2y.$$

En coordenadas polares,

$$\iint_D (2x+2y)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r\cos\theta + 2r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^1 2r^2\, dr \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 0,$$

pues $\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0$. Luego el flujo es $\boxed{0}$.
*Puntaje*: cálculo de la divergencia (6 pts), enunciado correcto de la forma de flujo (5 pts), planteamiento en polares (7 pts), conclusión con argumento de simetría o cálculo (7 pts).

(c) **(15 pts)** Parametrizamos $C:\ \mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t\rangle$, $t \in [0, 2\pi]$. Sobre $C$, la normal exterior unitaria es $\mathbf{n} = \langle \cos t, \operatorname{sen} t\rangle$ y $ds = dt$. Además $\mathbf{F}(\cos t, \operatorname{sen} t) = \langle \cos^2 t - \operatorname{sen} t,\ \cos t + \operatorname{sen}^2 t\rangle$.

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = (\cos^2 t - \operatorname{sen} t)\cos t + (\cos t + \operatorname{sen}^2 t)\operatorname{sen} t = \cos^3 t + \operatorname{sen}^3 t,$$

donde los términos cruzados $-\operatorname{sen} t\cos t$ y $\operatorname{sen} t\cos t$ se cancelan.

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t + \operatorname{sen}^3 t)\, dt = 0,$$

pues ambas integrales son nulas en un período (alternativamente, los integrandos son antisimétricos respecto a $t = \pi$). Coincide con (b). ✓

*Puntaje*: identificación correcta de $\mathbf{n}$ y $ds$ sobre $C$ (6 pts), simplificación de $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ (6 pts), conclusión (3 pts).

4. Considera la superficie $S$ parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle u\cos v,\ u\operatorname{sen} v,\ u^2\rangle, \qquad 0 \le u \le 2,\ \ 0 \le v \le 2\pi.$$

(a) **(15 pts)** Identifica $S$ describiendo qué tipo de superficie es. Calcula $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$, y luego $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.

(b) **(20 pts)** Encuentra la ecuación cartesiana del plano tangente a $S$ en el punto correspondiente a $(u, v) = (1, 0)$.

(c) **(25 pts)** Sea $R$ la región en el primer cuadrante del plano $xy$ acotada por las curvas

$$xy = 1, \quad xy = 4, \quad y = x, \quad y = 4x.$$

Usa el cambio de variables $u = xy$, $v = y/x$ para calcular el área de $R$.

*Indicación*: calcula primero $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ y luego utiliza $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right)^{-1}$.

**Solución:**

(a) **(15 pts)** Como $z = u^2 = x^2 + y^2$ con $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $S$ es un trozo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ (con $0 \le z \le 4$).

$$\mathbf{r}_u = \langle \cos v, \operatorname{sen} v, 2u\rangle, \qquad \mathbf{r}_v = \langle -u\operatorname{sen} v,\ u\cos v,\ 0\rangle.$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 2u \\ -u\operatorname{sen} v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \langle -2u^2\cos v,\ -2u^2\operatorname{sen} v,\ u\rangle.$$

*Puntaje*: identificar el paraboloide (3 pts), $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ (6 pts), producto vectorial (6 pts).

(b) **(20 pts)** En $(u,v)=(1,0)$: punto $\mathbf{r}(1,0)=\langle 1,0,1\rangle$ y vector normal $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\big|_{(1,0)}=\langle -2,0,1\rangle$. La ecuación del plano tangente es

$$-2(x-1)+0(y-0)+1(z-1)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{2x-z=1}.$$

Verificación: en $(1,0,1)$, $2-1=1$. ✓

*Puntaje*: punto $\mathbf{r}(1,0)$ (5 pts), vector normal evaluado (8 pts), ecuación del plano (7 pts).

(c) **(25 pts)** Las cuatro curvas $xy=1$, $xy=4$, $y=x$, $y=4x$ se transforman, en las nuevas variables, en $u=1$, $u=4$, $v=1$, $v=4$. La región imagen es el cuadrado $[1,4]\times[1,4]$.

Calculamos el jacobiano:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix}=\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2}=\frac{2y}{x}=2v.$$

Como $v>0$ en $R$ (primer cuadrante), $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{1}{2v}$.

$$\text{área}(R)=\iint_R dA=\int_1^4\int_1^4 \frac{1}{2v}\,du\,dv$$

*(reordenando las integrales)*

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 du\int_1^4\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\ln 4=3\ln 2.$$

*Puntaje*: identificar la región imagen como $[1,4]\times[1,4]$ (8 pts), cálculo del jacobiano (8 pts), planteamiento y cálculo de la integral (9 pts).