Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 2

Arcoparametrización y longitud de arco

1. Resumen de contenidos

Longitud de arco de una curva suave $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ trazada desde $t = a$ hasta $t = b$

$$L = \int_a^b |r'(t)| \, dt$$

También, es posible tener una "función de longitud de arco"

$$s(t) = \int_0^t ||r'(\tau)|| \, d\tau$$

Luego, si se resuelve la integral para despejar t como una función de s y se reemplaza en la curva

$$t = t(s) \Rightarrow r(t(s))$$

Se obtiene la parametrización por longitud de arco o arcoparametrización.

Ademas, derivando $s(t)$ se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = |r'(t)|$$

Elementos asociados a una curva parametrizada

$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} \qquad N = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} \qquad B(t) = T(t) \times N(t)$$

$$\kappa = |\frac{dT}{ds}| = |\frac{T'(t)}{r'(t)}| = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

Si la curva es plana -posee una ecuación del tipo $y = f(x)$-, κ toma la siguiente forma

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

Plano normal en P $\rightarrow$ Determinado por N y B en un punto P, constituído por todas las lineas ortogonales a T.

Plano osculador en P $\rightarrow$ Determinado por T y N en el punto P, es aquel que contiene a la curva en las cercanias de P. Si la curva es plana, el plano osculador contiene a toda la curva.

Plano rectificante en P $\rightarrow$ Determinado por T y B en el punto P

2. Problemas

Problema 1

En base a la intersección de las siguientes superficies

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = \dfrac{2}{3}xy \end{cases}$$

Obtenga:

1. La parametrización de la intersección
2. La longitud de la curva desde (0,0,0) a $(1,1,\frac{2}{3})$
3. La reparametrización por longitud de arco

Problema 2

Considere la arcoparametización $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(s) = (rcos\ \frac{s}{r}, rsen\ \frac{s}{r})$$

Demuestre que $f''(s)$ es ortogonal a $f'(s)$ para toda s en [0,2π] y encuentre los puntos de la curva con tangentes horizontales y verticales.

Problema 3

La trayectoria de una particula está dada por la intersección entre el semielipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ y el cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Encuentre la ecuación paramétrica de la trayectoria, el vector velocidad, aceleración y la ecuación paramétrica de la recta tangente en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Problema 4

Considere la intersección de las siguientes superficies

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = x^2 \\ z + x = 2 \end{cases}$$

Obtenga:

1. La parametrización de su intersección
2. El vector tangente unitario T a la curva en el punto $(1, \sqrt{2}, 1)$
3. Los puntos en donde la recta tangente es horizontal y vertical.

Problema 5

Demuestre que la formula de longitud de curva polar $r = r(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ está dada por

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + (r')^2(\theta)} d\theta$$