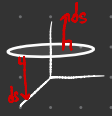
Truco para n en $\iint_S \vec{F} \cdot n\,ds$



Disco:



$ds = r\,dr\,d\theta$, y n le da la dirección $\langle 0,0,\pm 1\rangle$ → Puede ser $\langle \pm 1, 0, 0\rangle$ o $\langle 0, \pm 1, \phi\rangle$

es: $\iint_S \vec{F}(\phi) \cdot \langle 0,0,\pm 1\rangle\, r\,dr\,d\theta$

Capa cilíndrica



→ Cilindro de ecuación $x^2+y^2=R^2$

$ds = R\,d\theta\,dz$, y la dirección dada por $n = \hat{r}$ → $\langle R\cos\theta, R\sin\theta, z\rangle$

$\iint_S \vec{F}(\phi) \cdot \hat{r}\, R\,d\theta\,dz$

Plano



$ds = dx\,dy$ v $dz\,dy$ v $dx\,dz$, con $n = \hat{\imath}$ v $\hat{\jmath}$ v $\hat{k}$

es: $\iint_S \vec{F}(\phi) \cdot \hat{k}\,dx\,dy$

Cascarón esférico

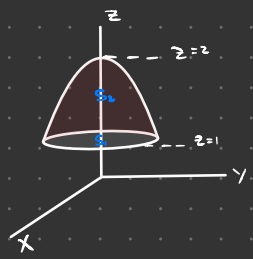


$ds = \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, y $n = \hat{r}$ → ¡En esféricas!

→ $x^2+y^2+z^2=\rho^2$

$\iint_S \vec{F}(\phi) \cdot \hat{r}\, R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

P11



① Piden Flujo por S_2, Para usar Divergencia tengo que **Cerrar**

② Mi región $E = S_1 \cup S_2$

③ Verificamos Hip. ($\vec{F}$ con $\frac{\partial}{\partial}$ Continuas en E y Región cerrada)

$$\therefore \iint_{S_1 \cup S_2} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F}\, dV \qquad \nabla \cdot \vec{F} = 1$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F}\, dV - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{dS}$$

$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot n\, dS$, $n = -\hat{k}$ (se nota al mirarla), El Plato $\rightarrow \phi(r,\theta) = \langle r\cos\theta, r\sin\theta, 1\rangle$

$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{F}(\phi) \cdot \langle 0,0,-1\rangle\, dS = \iint_{S_2} dS = \text{Area } S_2 \Rightarrow$ La n es $x^2+y^2=1 \Rightarrow \text{Area} = \pi$

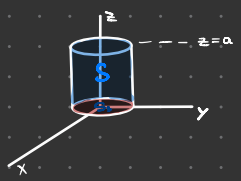
↳ Saliendo $\hat{k}$

$$\iiint_E dV \Rightarrow \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{1}^{2-x^2-y^2} dz\,dy\,dx \Rightarrow \text{En Cilíndricas} \Rightarrow \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_1^{2-r^2} r\, dz\, d\theta\, dr$$

$$\Rightarrow 2\pi \int_0^1 (1-r^2)\, r\, dr = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

P2)



$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4,\ 0 \le z \le a\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 4,\ z=a\}$$

El Cilindro + La Tapa

① Pide que $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{dS} = 10\pi$, Quiere usar Divergencia pero Hay que cerrar

② Mi nueva región $E = S \cup S_1$

③ Verifico Hip. (F con $\frac{\partial}{\partial}$ continuas en E y Región cerrada)

$$\therefore \iint_{S\cup S_1} \vec{F}\cdot\vec{dS} = \iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\,dV \qquad \nabla\cdot\vec{F} = 2(x+y+z)$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot\vec{dS} = \iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\,dV - \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{dS}$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_0^a 2(x+y+z)\,dz\,dy\,dx \Rightarrow 2\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^a r^2(\cos\theta+\sin\theta)+2r\,dz\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2(\cos\theta+\sin\theta)\,dr\,d\theta + 4\pi a^2$$

Da Cero, integro Sen y Cos en su Periodo

$$\iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\,dV = 4\pi a^2$$

El Plato S_1: $\phi(r,\theta) = \langle r\cos\theta, r\sin\theta, 0\rangle$ y El Vector Normal al Oso $n = -\hat{k}$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{F}(\phi)\cdot n\,ds = \iint_{S_1} \langle (r\cos\theta)^2, (r\sin\theta)^2, 0\rangle \cdot \langle 0,0,-1\rangle\,ds = 0$$

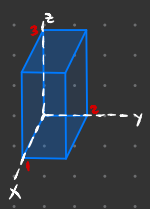
Reemplazando: $10\pi = 4\pi a^2 + 0$

$$\Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Pero por gráfico $a > 0$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

P3)



Todo lo Azul es la Superficie S y encierra la región E

① S es cerrada y en E $\frac{\partial F}{\partial (\cdot)}$ son continuas

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot\vec{dS} = \iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\,dV \qquad \nabla\cdot F = 4xy + 8yz$$

$$\Rightarrow \int_0^3\int_0^2\int_0^1 4xy + 8yz\,dx\,dy\,dz \Rightarrow 3\int_0^2\int_0^1 4xy\,dx\,dy + \int_0^3\int_0^2 8yz\,dy\,dz$$

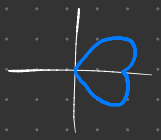
$$\Rightarrow 3\int_0^2 2y\,dy + \int_0^3 16z\,dz$$

$$\Rightarrow 12 + 72$$

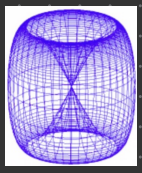
$$\Rightarrow 84\ \left[\tfrac{kJ}{s}\right]$$

$\therefore$ El flujo a través de S es 84

P4)



3D



USAMOS T. DIV. PARA ENCONTRAR VOLUMEN. $\Rightarrow \iiint_S \nabla\cdot\vec{F}\,dV$ → DEBE SER 1 $\Rightarrow$ ¿QUÉ CAMPO $\nabla\cdot F = 1$?

UNA ELECCIÓN ES $\vec{F} = (x,0,0) \Rightarrow \nabla\cdot\vec{F} = 1$

ENTONCES, CALCULO $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s}$, YA QUE ENCONTRÉ LOS LÍMITES DE $\iiint_S$ ES INMEDIATO.

PARA PARAM. S RECUERDO RELACIÓN POLARES - RECTANGULARES: $x = r\cos\theta \;\wedge\; y = r\sin\theta \Rightarrow \phi = \begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \cos u \sin v \\ z = \sin u \end{cases}$

COMO SIEMPRE: $\phi_u = \langle -\sin u\cos v, -\sin u\sin v, 2\cos u\rangle \;\wedge\; \phi_v = \langle -\cos u\sin v, \cos u\cos v, 0\rangle$

$\therefore \phi_u \times \phi_v = \langle -2\cos u\cos v\cos u, -2\cos u\sin v\cos u, -\sin u\cos u\rangle$

¿ORIENTACIÓN? → NOTAR QUE TODAS SUS COMPONENTES SON NEGATIVAS (APUNTAN AL CENTRO. ✳), DEBEMOS CAMBIAR SIGNO

$\Rightarrow -\phi_u \times \phi_v = \phi_v \times \phi_u = \langle 2\cos u\cos v\cos u, 2\cos u\sin v\cos u, \sin u\cos u\rangle$

AHORA HACEMOS $\iint_S \vec{F}(\phi)\cdot(\phi_v \times \phi_u)\,ds$, PERO SI DIJO $F = \langle x,0,0\rangle$ TENGO QUE EVALUAR $\cos u\cos v$, FEO.

MEJOR CAMBIO A $F = \langle 0,0,z\rangle$ YA QUE CUADRA CON $\nabla\cdot F = 1$

$\Rightarrow \iint_S \langle 0,0,\sin 2u\rangle \cdot \langle 2\cos u\cos v\cos u, 2\cos u\sin v\cos u, \sin u\cos u\rangle\,du\,dv$

$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin 2u\cos u\sin u\,dv\,du$ ✳ $\sin 2u = 2\sin u\cos u$

$\Rightarrow 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2u\cos u\,\frac{\sin 2u}{2\cos u}\,du$

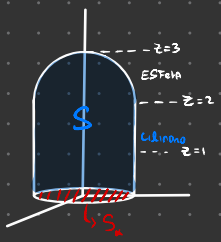
$\Rightarrow \pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2u\,du$ ✳ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos 4u\,du$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\cdot\pi$

$\therefore$ VOLUMEN ES $\frac{\pi^2}{2}$

P5)



S No es cerrada, Debemos hacerlo para usar Divergencia.

$$E = S \cup S_a$$

$$\therefore \iint_{S \cup S_a} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F} \, dv \qquad \nabla \cdot \vec{F} = 2 + 3 + 4 = 9$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F} \, dv - \iint_{S_a} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

① $\iiint_E 9 \, dv = 9 \cdot \text{Volumen } E \Rightarrow 9(\text{Volumen Cilindro} + \text{Volumen semiesfera}) = 9\left(\pi 1^2 \cdot 2 + \frac{2}{3}\pi 1^3\right) = 24\pi$

② $\iint_{S_a} \vec{F} \cdot \vec{ds}$, Parametrizando el plato: $\phi(r,\theta) = \langle r\cos\theta, r\sin\theta, 0 \rangle$ con $n = -\hat{k}$

$$\Rightarrow \iint_{S_a} F(\phi) \cdot (-\hat{k}) \, ds = -\iint_{S_a} 4 \cdot 0 - r\cos\theta \, dr\,d\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\theta \, dr\,d\theta = 0$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = 24\pi - 0 = 24\pi$$