PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre de 2012

MAT1630 - Cálculo III
Interrogación 1 - Solución

1. *a*) Sea E el interior del triángulo con vértices $(0,0)$, $(8,0)$ y $(0,6)$. Identifique la frontera de E (sin demostrar) y demuestre rigurosamente que $(1,1)$ pertenece a su interior.

Solución 1. Si llamamos

- Γ_1 al segmento que une a $(0,0)$ con $(8,0)$:

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 8, y = 0\}, \tag{1}$$

- Γ_2 al segmento que une a $(8,0)$ con $(0,6)$:

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 8, y = 6 - 3x/4\}, \tag{2}$$

- y Γ_3 al segmento que une a $(0,6)$ con $(0,0)$:

$$\Gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 6\}, \tag{3}$$

entonces la frontera de E es $\partial E = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ y

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 6 - 3x/4,\ x > 0,\ y > 0\}. \tag{4}$$

Para demostrar que $P_0(1,1)$ está en el interior de E, consideremos primero que $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ es un vector unitario normal a la recta $y = 6 - 3x/4$, luego

$$\text{dist}(P_0, \Gamma_2) = |[(1,1) - (0,6)] \cdot (\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5})| = \tfrac{17}{5} > 1. \tag{5}$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$\text{dist}(P_0, \Gamma_1) = \text{dist}(P_0, \Gamma_3) = 1. \tag{6}$$

Esto nos muestra que $B(P_0, r) \subset E$ para todo $0 < r < 1$. En efecto, si llamamos O al origen y $\mathbf{n}_2$ al vector $\mathbf{n}_2 = (\frac{3}{4}, 1)$ (también perpendicular a Γ_2), para todo $P(x,y) \in B(P_0, r)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{4} + y = \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{OP} &= \mathbf{n}_2 \cdot (\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}) && (7)\\
&\leq \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{OP_0} + |\mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{P_0P}| \quad (\text{pues } \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|) && (8)\\
&\leq \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{OP_0} + \|\mathbf{n}_2\|\|\overrightarrow{P_0P}\| \quad (\text{desigualdad de Cauchy-Schwarz}) && (9)\\
&= (\tfrac{3}{4} + 1) + \tfrac{5}{4}r. && (10)
\end{aligned}$$

En particular, si $r < \frac{17}{5}$ entonces $\frac{3x}{4} + y < 6$ (el punto P está bajo la recta $y = 6 - \frac{3x}{4}$). Nos falta demostrar que $B(P_0, r)$ está contenida en el primer cuadrante para todo $0 < r < 1$. Esto es consecuencia del hecho de que $|1 - x| \leq \text{dist}(P, P_0)$ y $|1 - y| \leq \text{dist}(P, P_0)$:

$$P(x, y) \in B(P_0, r) \quad \Rightarrow \quad y = 1 - (1 - y) \geq 1 - |1 - y| > 1 - r > 0 \tag{11}$$

si $r < 1$. Análogamente, $(x, y) \in B(P_0, r) \ \Rightarrow \ x > 0$. Se concluye que P_0 está en el interior de E. □

Solución 2. También podemos decir que

$$P \in B(P_0, r) \ \Rightarrow \ |x - 1| \leq \text{dist}(P, P_0) < r, \ |y - 1| \leq \text{dist}(P, P_0) < r, \tag{12}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \tfrac{3x}{4} + y &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}(x - 1) + 1 + (y - 1) && (13) \\ &\leq \tfrac{7}{4} + \tfrac{3}{4}|x - 1| + |y - 1| \leq \tfrac{7}{4} + \tfrac{3}{4}r + r = \tfrac{7}{4}(1 + r), && (14) \end{aligned}$$

lo cual muestra que $y < 6 - \frac{3x}{4}$ para todo $(x, y) \in B(P_0, 1)$. □

b) Estudie el siguiente límite: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^4}$.

Solución. Vemos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1 - 1}{y^4} = 0 \tag{15}$$

pero

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{2x + 4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{1 + 2x^2} = 1, \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

luego el límite no existe (al acercarnos de distintas maneras al origen la función converge a distintos límites). □

2. Usando la definición de derivada, estudie la diferenciabilidad de

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

en el origen.

Solución. Vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}(1/x) = 0 \tag{18}$$

(hemos usado el hecho de que $|x\,\mathrm{sen}(1/x)| \leq |x|$) y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} y\,\mathrm{sen}(1/y) = 0. \tag{19}$$

Por lo tanto, si f es diferenciable en el origen, su derivada debe ser la transformación lineal

$$(h,k) \quad \mapsto \quad h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0. \tag{20}$$

En este caso la función es diferenciable en $(0,0)$. Para ver esto, debemos demostrar que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0, \tag{21}$$

i.e., que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sqrt{h^2+k^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{h^2+k^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\right| < \varepsilon. \tag{22}$$

Dicho δ existe, basta con que tomemos $\delta = \varepsilon$, pues

$$\left|\sqrt{h^2+k^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\right| < \sqrt{h^2+k^2} \tag{23}$$

($\left|\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\right|$ es siempre menor o igual a 1). □

3. *a*) Encuentre el valor de $b \in \mathbb{R}$ que hace que la superficie $z = xy - y + bx + 3$ sea tangente al plano xy.

   Solución. El plano tangente a la superficie $z = f(x,y) = xy - y + bx + 3$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ es normal al vector

   $$\mathbf{n}(x_0,y_0) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right) = (-y_0 - b, -x_0 + 1, 1). \tag{24}$$

   Para que dicho plano sea el plano xy:

   - el vector $\mathbf{n}(x_0,y_0)$ debe ser paralelo al eje z, i.e., es necesario que $y_0 = -b$ y $x_0 = 1$

- el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en el que la superficie es tangente al plano xy debe pertenecer a dicho plano, i.e., es necesario que $-b + b + b + 3 = f(1, -b) = f(x_0, y_0)$ sea igual a cero.

Se concluye que la superficie es tangente al plano xy si y sólo si $b = -3$. □

b) Sean $f(x, y) = \pi x^2 y$ y $g(x, y) = 4x^2 + 3xy$ definidas en $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Para cada $x > 0$ sea $h(x)$ tal que $(x, h(x))$ pertenece al conjunto

$$\Gamma := \{(x, y) \in \Omega : g(x, y) = 3\}.$$

Encuentre el valor x_0 de x que maximiza la función $f(x, h(x))$, y muestre que Γ es tangente a la curva

$$\{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = f(x_0, h(x_0))\}$$

en el punto $(x_0, h(x_0))$.

Solución. En primer lugar,

$$g(x, y) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3xy = 3 - 4x^2, \tag{25}$$

luego la función h buscada está dada por $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{3}$, $x > 0$. Para maximizar

$$u(x) := f(x, h(x)) = \pi x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{4x}{3}\right) = \pi x - \frac{4\pi}{3} x^3 \tag{26}$$

derivamos e igualamos a cero:

$$u'(x) = \pi(1 - 4x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2}. \tag{27}$$

Como $u''(x) = -8\pi x^2$ es negativa para todo x, la función es cóncava y su valor máximo está dado por $u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(2 - \frac{2}{3}) = \frac{16\pi}{3}$. Como las curvas de nivel son perpendiculares al gradiente, sólo nos resta calcular $h(\frac{1}{2}) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ y mostrar que

$$\nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right) = \nabla f(x_0, h(x_0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, h(x_0)), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, h(x_0))\right) \tag{28}$$

$$= \left(2\pi x_0 h(x_0), \pi x_0^2\right) = \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) \tag{29}$$

y

$$\nabla g\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right) = \nabla g(x_0, h(x_0)) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, h(x_0)), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, h(x_0))\right) \tag{30}$$

$$= (8x_0 + 3h(x_0), 3x_0) = \left(8, \frac{3}{2}\right) \tag{31}$$

son paralelos. Esto completa la demostración pues $\nabla g(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}) = \frac{6}{\pi} \nabla f(\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$. □

4. *a)* Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = 0$ para todo $(u,v) \in \Omega$. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $\phi(x,y) := f\left(x-y, x+y\right)$. Calcule $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$.

Solución. Llamemos α y β a las funciones $\alpha(x,y) = x - y$ y $\beta(x,y) = x + y$. Entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial u}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big) + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial v}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big) \tag{32}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big) \tag{33}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial u}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big) + \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial v}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big) \tag{34}$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial u}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big) \tag{35}$$

Aplicamos la regla de la cadena para derivar $\frac{\partial f}{\partial u}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big)\right) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} \tag{36}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\big(\alpha(x,y),\beta(x,y)\big)\right) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \tag{38}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

(donde las derivadas parciales están siendo evaluadas en el punto $(x+y, x-y)$). Concluímos que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(x-y, x+y). \tag{41}$$

Derivando con respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\big(x-y,x+y\big)\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} \tag{42}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\big(x-y,x+y\big)\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \tag{43}$$

luego

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\right) + \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \tag{44}$$

Concluímos que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(x,y)=2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x-y,x+y)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x-y,x+y)\right)=0 \quad (45)$$

para todo (u,v). □

b) Sea $\Omega=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|<1\}$ y sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diferenciable en todo $\mathbb{R}^n$. Suponga que para todo $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ existe $\alpha(\mathbf{x})>0$ tal que $\nabla f(\mathbf{x})=-\alpha(\mathbf{x})\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. Dado $\mathbf{x}_0\in\partial\Omega$, calcule la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$, en la dirección $-\mathbf{x}_0$. Demuestre que si $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} f(\mathbf{x})$ existe, éste debe alcanzarse en el interior de Ω.

Solución. Sean $\mathbf{x}_0\in\partial\Omega=\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|=1\}$ y $\mathbf{e}=-\mathbf{x}_0$. Si llamamos $g(t)$ a la función $g(t)=f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{e})$, entonces la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $-\mathbf{x}_0$ está dada por

$$g'(0)=\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{e}=-\alpha(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0\cdot\mathbf{e}=\alpha(\mathbf{x}_0). \quad (46)$$

En particular, $g'(0)>0$, luego para todo t positivo en una vecindad de $t=0$ se tiene que $g(t)>g(0)$. Reemplazando en la definición de g obtenemos que

$$f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{e})>f(\mathbf{x}_0)\quad\forall\, t\in(0,\delta), \quad (47)$$

para algún $\delta>0$.
Suponer que $\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} f(\mathbf{x})$ existe significa que existe $\mathbf{x}_0\in\overline{\Omega}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|\leq 1\}$ tal que $f(\mathbf{x}_0)=\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} f(\mathbf{x})$. Debemos demostrar que $\mathbf{x}_0$ no puede estar en la frontera de Ω. Supongamos, buscando llegar a una contradicción, que $\|\mathbf{x}_0\|=1$. Entonces, por lo visto anteriormente, $f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{e})>f(\mathbf{x}_0)$ para todo $t\in(0,\delta)$. Sin embargo, el vector $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+t\mathbf{e}=\mathbf{x}_0-t\mathbf{x}_0=(1-t)\mathbf{x}_0$ es tal que

$$\|\mathbf{x}\|=(1-t)\|\mathbf{x}_0\|=1-t<1, \quad (48)$$

es decir, $\mathbf{x}\in\Omega$. Con esto llegamos a una contradicción pues, como $f(\mathbf{x}_0)=\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} f(\mathbf{x})$, se tiene que $f(\mathbf{x}_0)\geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}\in\Omega$. Esto completa la demostración. □