

Integrales de Línea para campos escalares

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

10 de enero de 2023

Integrales de Línea para campos escalares

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y C una curva regular y simple, contenida en U y parametrizada por $\alpha(t)$ con $t \in [a, b]$, entonces la integral de línea de f sobre C es

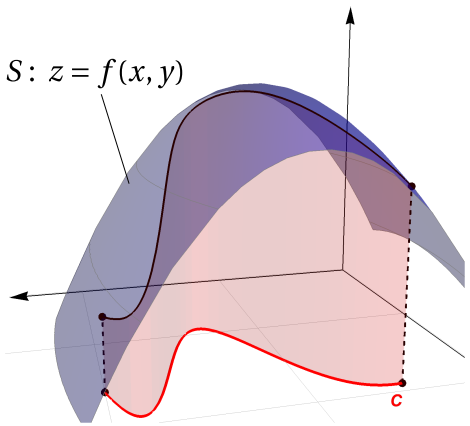
$$\int_C f(x_1, \ldots, x_n)\, ds = \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|\, dt\,.$$

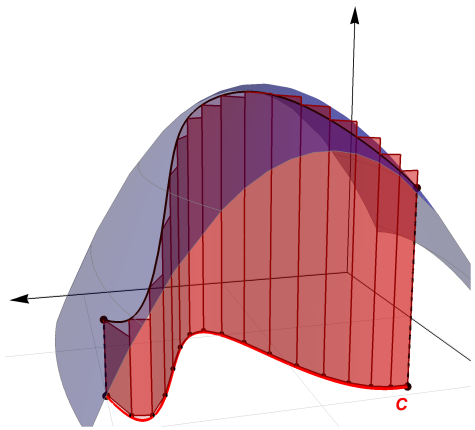
Integrales de Línea para campos escalares

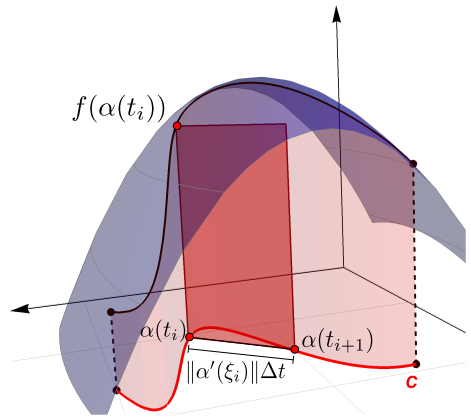
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Interpretación Geométrica

Si $f(x,y) \geqslant 0$ entonces la integral de línea $\displaystyle\int_C f(x,y)\,ds$ representa el área de la cortina cuya base es la curva C y su altura por arriba del punto (x,y) es $f(x,y)$.







Integrales de Línea para campos escalares

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

EJEMPLO 1 Calcular $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds$ donde C es la hélice de ecuaciones paramétricas

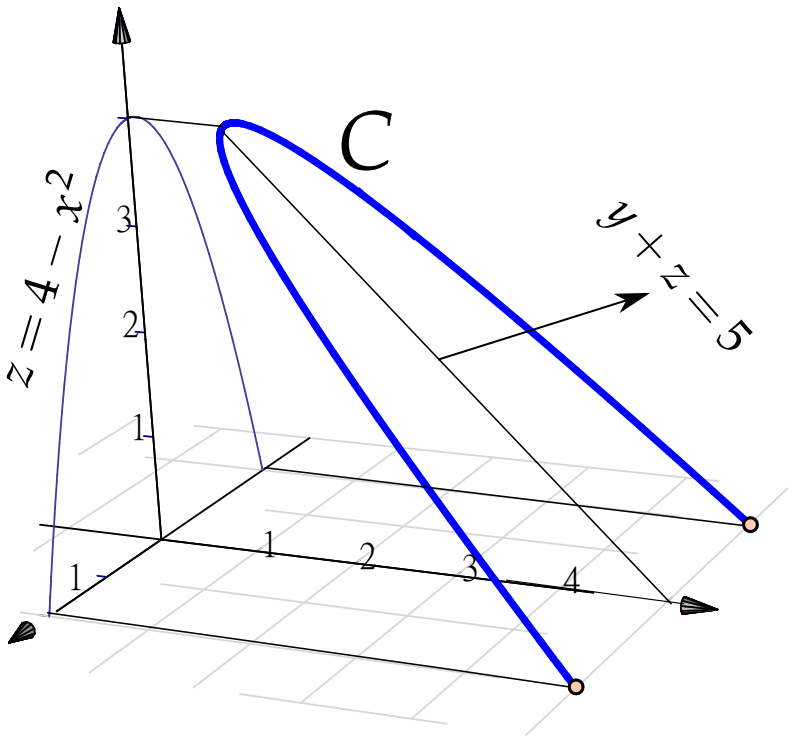
$$x = 2\cos(t)\,, \quad y = 2\sin(t)\,, \quad z = 2t, \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Integrales de Línea para campos escalares

EJEMPLO 2 Calcule la integral de línea

$$\int_C \frac{x^2 + 2y}{\sqrt{33 - 8z}}\, ds$$

donde C es la curva que se muestra en la figura



Integrales de Línea para campos escalares

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Observación. Si $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ entonces

$$\int_C f(x_1, \ldots, x_n)\, ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = \ell(\alpha)\,.$$

Observación. El libro guía usa el término curva uniforme para indicar una curva de clase C^1, es decir es derivable con derivada continua.

Integrales de Línea para campos escalares

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

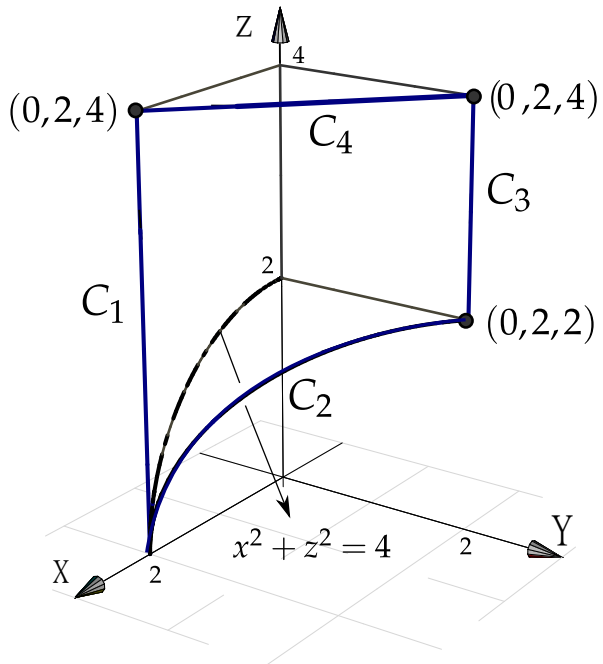
Definición.

Suponga que C es una curva de clase C^1 que es la unión de una cantidad finita de curvas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de clase C^1, donde el punto inicial de C_{i+1} es el punto final de C_i. Entonces, se define la integral de línea de f a lo largo de C por

$$\int_C f(x_1, \ldots, x_n)\, ds = \int_{C_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, ds\,.$$

Integrales de Línea para campos escalares

EJEMPLO 3 Calcule la integral de línea $\int_C (x + y + z - 2)\, ds$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ es la curva que se muestra en la figura



Integrales de Línea para campos escalares

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Definición.

1. Definimos las integrales de línea de f a lo largo de C con respecto a x por:

$$\int_C f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)\,dt\,.$$

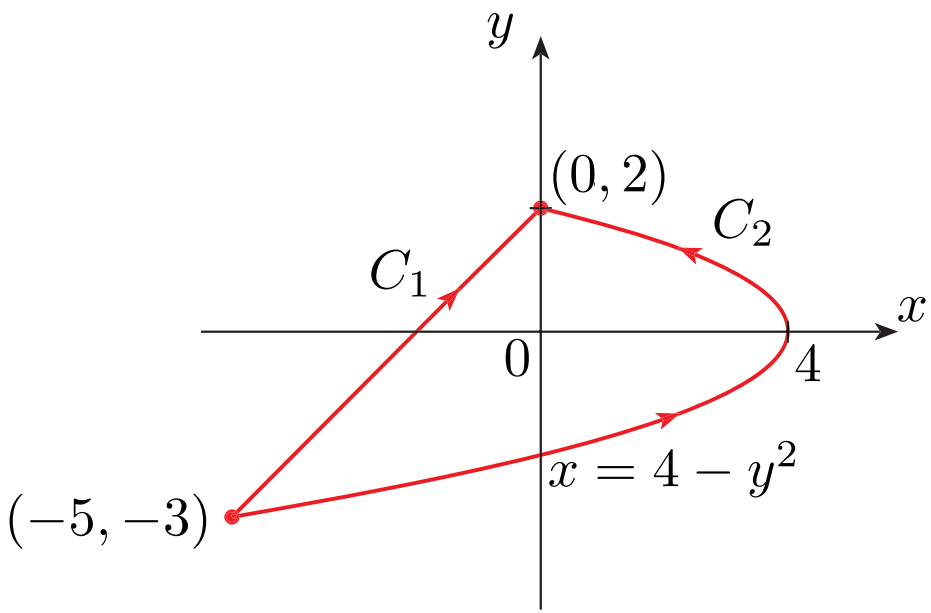
2. Definimos las integrales de línea de f a lo largo de C con respecto a y por:

$$\int_C f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)\,dt\,.$$

Integrales de Línea para campos escalares

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_C y^2 dx + x dy$, donde

1. $C = C_1$ es el segmento de recta desde $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ y
2. $C = C_2$ es el arco de la parábola $x = 4 - y^2$ desde $(-5, -3)$ a $(0, 2)$.



Integrales de Línea para campos escalares

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Si $\alpha_1(t)$ parametriza C en una dirección con vector tangente T y $\alpha_2(t)$ parametriza C en el sentido contrario, con vector tangente $-T$, entonces denotamos la segunda curva como $-C$ y se tiene que

$$\int_{-C} f(x,y)dx = -\int_{C} f(x,y)dx \quad \text{y} \quad \int_{-C} f(x,y)dy = -\int_{C} f(x,y)dy$$

Pero si se integra con respecto a la longitud de arco, el valor de la integral no cambia cuando se invierte la orientación

$$\int_{-C} f(x,y)ds = \int_{C} f(x,y)ds\,.$$