Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
11 de Mayo de 2017

MAT1630 ⋆ Cálculo III
Pauta Interrogación 2

P1.- Encuentre un vector tangente unitario, un vector normal unitario, un vector binormal unitario, la curvatura y la torsión en el punto $(2,0,4)$ de la curva dada por:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

Solución:

Primero, parametrizamos la curva:

$$x = y + 2, \text{ entonces} \quad (y+2)^2 + y^2 - z = 0, \quad z = 2y^2 + 4y + 4.$$

Entonces,

$$r(t) = (t+2, t, 2t^2 + 4t + 4), \ t \in \mathbb{R}.$$

Así,

$$r(0) = (2,0,4), \quad r'(t) = (1,1,4t+4), \quad r''(t) = (0,0,4), \quad r'''(t) = (0,0,0).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{r'(0)}{\|r'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{18}}(1,1,4), \\ B(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \quad \text{(es el vector normal al plano } x - y = 2 \text{ normalizado)}, \\ N(0) &= B(0) \times T(0) = \frac{1}{3}(2,2,-1), \\ k(0) &= \frac{\|r'(0) \times r''(0)\|}{\|r'(0)\|^3} = \frac{2}{27}, \\ \tau(0) &= 0 \quad \text{(es una curva plana)}. \end{aligned}$$

También se pudo haber encontrado $N(0), B(0), \tau(0)$ usando las fórmulas:

$$N(0) = \frac{T'(0)}{\|T'(0)\|}, \quad B(0) = T(0) \times N(0), \quad \tau(0) = \frac{(r'(0) \times r''(0)) \cdot r'''(0)}{\|r'(0) \times r''(0)\|}.$$

P2.- Suponga que una curva γ con curvatura κ no nula y torsión τ satisface:

"Todas las rectas tangentes forman un ángulo constante θ_0 con un vector v fijo".

Muestre que $\dfrac{\tau}{\kappa}$ es constante.

Solución:

Por hipótesis tenemos que $T \cdot v = ||v|| \cos(\theta_0)$. Derivando esta relación obtenemos

$$\kappa N \cdot v + T \cdot 0 = 0,$$

por tanto $N \cdot v = 0$. Luego v no posee componente normal con respecto al tiedro de Frenet Serret de γ. Por tanto $B \cdot v = \pm ||v|| \sin(\theta_0)$.

Derivando $N \cdot v = 0$ obtenemos que

$$(-\kappa T + \tau B) \cdot v + N \cdot 0 = 0 \Rightarrow \kappa \cos(\theta_0) = \pm \tau \sin(\theta_0).$$

Por tanto $\dfrac{\tau}{\kappa} = \pm \cot(\theta_0)$.

P3.- a) Un alambre de longitud $L = \sqrt{6}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ se dobla con la forma de la espiral cónica

$$x(t) = t\,\cos(t), \quad y = t\,\text{sen}(t), \quad z(t) = t$$

desde el origen hasta el punto $P(2\cos(2), 2\,\text{sen}(2), 2)$. Encuentre la altura de su centroide.

b) Si C es el triángulo con vértices el origen, el punto $(4,0)$ y el punto $(0,3)$ recorrido en sentido antihorario, calcule $\displaystyle\int_C (x^2+xy)\,ds$.

Solución:

a) Buscamos

$$\overline{z} = \frac{\int_\lambda z\,ds}{L} = \frac{\int_0^2 z\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt}{L} \qquad \lambda(t) = (t\,\cos(t), t\,\text{sen}(t), t)$$

$x'^2+y'^2+z'^2 = (\cos(t)-t\,\text{sen}(t))^2 + (\text{sen}(t)+t\cos(t))^2 + 1 = 2+t^2$, por lo tanto

$$\overline{z} = \frac{\int_0^2 t\sqrt{2+t^2}dt}{L} = \frac{\frac{2}{3}(3\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

b)

$$\int_C (x^2+xy)\,ds = \int_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} (x^2+xy)\,ds = \int_{\lambda_1}(x^2+xy)\,ds + \int_{\lambda_2}(x^2+xy)\,ds + \int_{\lambda_3}(x^2+xy)\,ds$$

Usamos las parametrizaciones

$$\lambda_1(t) = (0, 3-t), 0\le t\le 3, \quad \lambda_2(t) = (t,0), 0\le t\le 4, \quad \lambda_3(t) = (4-4t, 3t), 0\le t\le 1$$

$\int_{\lambda_1}(x^2+xy)\,ds = \int_0^3 0\,dt = 0$, $\quad \int_{\lambda_2}(x^2+xy)\,ds = \int_0^4 t^2\,dt = \frac{64}{3}$
$\int_{\lambda_3}(x^2+xy)\,ds = \int_0^1 (4-4t)(4-t)\sqrt{4^2+3^2}\,dt = \frac{110}{3}$ por lo tanto $\displaystyle\int_C (x^2+xy)\,ds = \frac{174}{3}$

P4.- Halle el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y,z) = (2x-y+z, x+y-z^2, 3x-2y+4z)$ al desplazar una partícula en el sentido antihorario alrededor de la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1, z = 0\,.$$

Solución. Al parametrizar la elipse para que la partícula recorra en sentido antihorario, se obtiene la curva parametrizada

$$C: \qquad \alpha(t) = (2+2\cos(t), 3+3\,\text{sen}(t), 0)\,, \quad t\in[0,2\pi]\,.$$

Luego, se tiene $\alpha'(t) = (-2\,\text{sen}(t), 3\cos(t), 0)$. Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza F es

$$\begin{aligned} W &= \int_C F(x,y,z)\cdot d\alpha(t) = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-2\,\text{sen}(t) + \cos(t)\,\text{sen}(t) + 15\cos(t) + 6]\,dt = 12\pi\,. \end{aligned}$$

P5.- Calcule la integral del campo vectorial

$$F(x,y,z) = (ye^{xy} + 2xe^y, xe^{xy} + x^2e^y, 2ze^z + z^2e^z)$$

sobre la curva $r(t) = (2\cos(t), \sin^2(t), \cos(2t))$, con $0\le t\le\pi$.

Solución: Suponiendo que el campo vectorial F es conservativo, vamos a buscar su potencial. Este debe cumplir que

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) = ye^{xy} + 2xe^y \text{ de donde } f(x,y,z) &= e^{xy} + x^2y + g(y,z) \\ xe^{xy} + x^2e^y + g_y(y,z) = f_y(x,y,z) = xe^{xy} + x^2e^y \text{ de donde } g(y,z) &= h(z) \\ h_z(z) = f_z(x,y,z) = 2ze^z + z^2e^z \text{ de donde } h(z) &= z^2e^z + C \end{aligned}$$

Por lo tanto un potencial es $f = e^{xy} + x^2e^y + z^2e^z$ y como este existe F es conservativo. Integramos usando el Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de linea, usando que r es una curva entre los puntos $r(0) = (2, 0, 1)$ y $r(\pi) = (-2, 0, 1)$.

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = f(r(\pi)) - f(r(0)) = f(-1, 0, 1) - f(1, 0, 1) = 0$$

P6.- Considere el siguiente campo vectorial

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2} \right).$$

a) Calcule $\int_{C_1} F \cdot dr$, donde $C_1 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$.

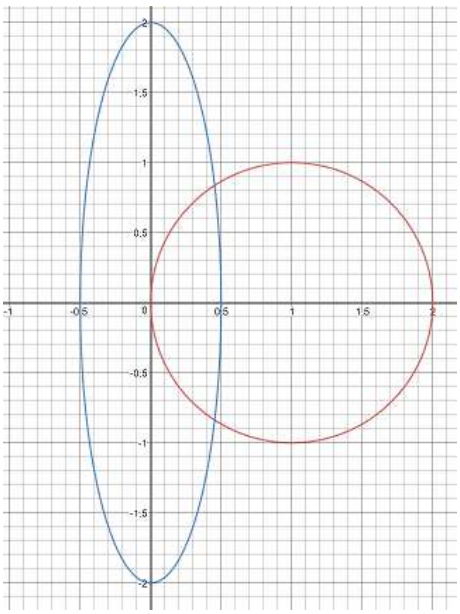
b) Calcule $\int_{C_2} F \cdot dr$, donde $C_2 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^2 + y^2 = 4\}$.

Solución:

Primero notemos que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, específicamente:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2}.$$

Pero no podemos decir que es conservativo en $\mathbb{R}^2$, ya que F no está definido en $(1, 0)$. Por lo tanto, depende de qué región encierre la curva correspondiente.



a) Como C_1 encierra el punto $(1, 0)$, entonces no podemos usar que el campo sea conservativo. Luego, una parametrización de C_1 es

$$r_1(t) = (\cos(t) + 1, \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Así, calculamos:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(r_1(t)) \cdot r_1'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin(t), -\cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

b) Como C_2 no encierra al punto $(1, 0)$, entonces el campo F es conservativo en esta región. Por lo tanto,

$$\int_{C_2} F \cdot dr = 0.$$