Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Calculo III - MAT1630
Profesor: Giancarlo Urzua
Ayudante: Jorge Andrés Matamala O. (jnmatamala@uc.cl)

Ayudantía 9

Parametrización de superficies

1. Resumen

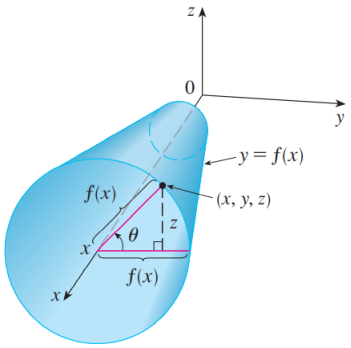
De la misma manera que hemos trabajado con curvas parametrizadas por una función vectorial $r(t)$, es posible describir una superficie mediante una función vectorial $r(u, v)$.

$$r(u, v) =< x(u, v) \ , y(u, v) \ , z(u, v) >$$

Donde se podrá calcular el área de su superficie, el flujo a través de ella y otras cosas entretenidas.

También, podemos abordar las superficies de revolución que conocimos en cálculo 1. Donde si se hace rotar una función $y = f(x)$ sobre el eje X, con $f(x) \geq 0$.

$$x = x \qquad y = f(x) \ cos(\theta) \qquad z = f(x) \ sen(\theta)$$



Para el plano tangente a una superficie parametrizada S trazada por una función vectorial $r = (u, v)$ en un punto P_0, se deben calcular los vectores tangentes r_u y r_v y luego hacer el producto cruz para obtener el mismo vector normal de siempre.

El área de una superficie parametrizada por $r(u, v)$ que se genera pasando una vez por cada punto en el domino es -esto tiene el objetivo de no barrer dos veces la misma superficie-

$$A(S) = \int \int_D |r_u \times r_v| dA$$

Problema 1

Identifique las superficies con la siguiente parametrización

1. $$r(u,v) = (u+v, 3-v, 1+4u+5v)$$

2. $$r(u,v) = (2\ sen(u), 3\ cos(u), v),\ \ v \in [0, 2\pi]$$

Problema 2

Encuentre el área de la porción de la superficie $z = x^2 - y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$

Problema 3

Considere la región encerrada por el manto de ecuación $z = x^2 - y^2 + 4$, el plano XY y el cilindro unitario $x^2 + y^2 = 1$

Calcule el área de la superficie que encierra esta región

Problema 4

Se tiene una parametrización en coordenadas polares dada por $r(\theta) = 1 + \theta$, $\theta \in [0, \pi]$, la cual completa una revolución en el eje X formando una superficie S. Entregue una parametrización de S.

Problema 5

Parametrice las siguientes superficies

1. Plano en $(1, 5, 0)$ con vectores directores $d_1 = (1, 2, 3$ y $d_2 = (1, 1, 0)$
2. La sección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que se encuentra sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. El elipsoide de ecuación $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$ para los casos: a) $z \geq 0$ b) $x \geq 0$