FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Interrogación 3
MAT1630 - Cálculo III

Instrucciones:

- Cada problema vale 60 puntos. La distribución se indica en cada parte.
- Justifica cada paso. Simplifica algebraicamente siempre que sea posible.
- **En caso de ser sorprendido con un celular, tablet u otro dispositivo electrónico durante la prueba, esta será evaluada con nota mínima.**
- Duración: 120 minutos.

---

1. Considera el cono $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 2$.

   (a) **(20 pts)** Parametriza S en coordenadas polares $\mathbf{r}(r, \theta) = \langle r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\rangle$. Calcula $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta$ y su módulo.

   (b) **(20 pts)** Calcula el área de S.

   (c) **(20 pts)** Calcula $\displaystyle\iint_S z\, dS$.

   Solución:

   (a) **(20 pts)** El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $0 \leq z \leq 2$ se parametriza con $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

   $$\mathbf{r}_r = \langle \cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ 1\rangle, \qquad \mathbf{r}_\theta = \langle -r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\theta,\ 0\rangle.$$

   $$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 1 \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \langle -r\cos\theta,\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\rangle.$$

   $$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + r^2} = \sqrt{2}\, r.$$

   Puntaje: derivadas parciales (6 pts), producto vectorial correcto (8 pts), módulo (6 pts).

   (b) **(20 pts)**

   $$\text{Área}(S) = \iint_D |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta = \sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^2 = \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot 2 = 4\sqrt{2}\,\pi.$$

   Puntaje: planteamiento de la integral de área (8 pts), integración correcta (12 pts).

(c) **(20 pts)** Sobre la parametrización, $z = r$, luego:

$$\iint_S z\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\cdot\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta = \sqrt{2}\cdot 2\pi\int_0^2 r^2\,dr = 2\sqrt{2}\,\pi\cdot\frac{8}{3} = \frac{16\sqrt{2}\,\pi}{3}.$$

Puntaje: sustitución $z = r$ y uso correcto de dS (8 pts), cálculo (12 pts).

2. Considera la semiesfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

(a) **(20 pts)** Parametriza S usando coordenadas esféricas

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \langle 2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 2\cos\phi\rangle,\quad \text{con } \phi\in[0,\pi/2],\ \theta\in[0,2\pi].$$

Muestra que $|\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta| = 4\,\mathrm{sen}\,\phi$.

(b) **(20 pts)** Calcula $\displaystyle\iint_S z\,dS$.

(c) **(20 pts)** Interpreta el resultado de (b) físicamente: si S es una lámina con densidad superficial $\delta(x,y,z) = z$, ¿cuál es su masa total? Usando la simetría para reducir los cálculos, determine el centro de masa de S.

Solución:

(a) **(20 pts)**

$$\mathbf{r}_\phi = \langle 2\cos\phi\cos\theta,\ 2\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -2\,\mathrm{sen}\,\phi\rangle,\quad \mathbf{r}_\theta = \langle -2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\ 0\rangle.$$

$$\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta = \langle 4\,\mathrm{sen}^2\,\phi\cos\theta,\ 4\,\mathrm{sen}^2\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 4\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\rangle = 4\,\mathrm{sen}\,\phi\,\langle\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \cos\phi\rangle.$$

$$|\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta| = 4\,\mathrm{sen}\,\phi\,\underbrace{\sqrt{\mathrm{sen}^2\,\phi+\cos^2\phi}}_{=1} = 4\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

(Válido para $\phi\in[0,\pi/2]$, donde $\mathrm{sen}\,\phi\geq 0$.)

Puntaje: derivadas parciales (8 pts), producto vectorial (8 pts), módulo simplificado (4 pts).

(b) **(20 pts)** Sobre la parametrización, $z = 2\cos\phi$:

$$\iint_S z\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(2\cos\phi)\cdot 4\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta = 8\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi.$$

Usando $\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\phi)$:

$$\int_0^{\pi/2}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}(2\phi)\,d\phi = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2\phi)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\iint_S z\,dS = 16\pi\cdot\frac{1}{2} = \boxed{8\pi}.$$

Puntaje: planteamiento correcto de la integral (8 pts), integral en ϕ (8 pts), resultado (4 pts).

(c) **(20 pts)** La masa es $m = \iint_S \delta \, dS = 8\pi$.
Por simetría: la hemisfera y la densidad $\delta = z$ son ambas simétricas respecto al eje z, luego el centro de masa tiene $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Para $\bar{z}$:

$$\frac{1}{8\pi} \iint_S z^2 \, dS = \frac{32\pi}{8\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi = \left[4\frac{-1}{3} \cos^3\phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$$

Puntaje: masa $= 8\pi$ correctamente identificada (8 pts), argumento de simetría para $\bar{x} = \bar{y} = 0$ (6 pts), cálculo de $\bar{z} = \frac{4}{3}$ (6 pts).

3. Sea S la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$, orientada con la normal apuntando *hacia abajo* (en la dirección $-\mathbf{k}$). Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x,\ y,\ z \rangle$.

   (a) **(20 pts)** Parametriza S usando $\mathbf{r}(x, y) = \langle x,\ y,\ 4 - x^2 - y^2 \rangle$ sobre la región $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calcula $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ y determina si apunta hacia arriba o hacia abajo. Elige el vector normal unitario $\mathbf{n}$ compatible con la orientación pedida.

   (b) **(20 pts)** Expresa la integral de flujo $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como una integral doble sobre D e indica claramente el signo que introduce la orientación.

   (c) **(20 pts)** Calcula la integral usando coordenadas polares.

Solución:

(a) **(20 pts)**

$$\mathbf{r}_x = \langle 1,\ 0,\ -2x \rangle, \qquad \mathbf{r}_y = \langle 0,\ 1,\ -2y \rangle.$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \langle 2x,\ 2y,\ 1 \rangle.$$

La componente z de $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ es $+1 > 0$, luego *apunta hacia arriba*. Como la orientación pedida es **hacia abajo**, se debe usar

$$d\mathbf{S} = -(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)\, dA = \langle -2x,\ -2y,\ -1 \rangle\, dA.$$

Puntaje: cálculo de $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ (10 pts), identificación de la dirección y reversión correcta (10 pts).

(b) **(20 pts)** Sobre la parametrización, $z = 4 - x^2 - y^2$, luego:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)) = \langle x,\ y,\ 4 - x^2 - y^2 \rangle.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \langle x,\ y,\ 4 - x^2 - y^2 \rangle \cdot \langle -2x,\ -2y,\ -1 \rangle\, dA \\ &= \left(-2x^2 - 2y^2 - (4 - x^2 - y^2)\right) dA \\ &= -(x^2 + y^2 + 4)\, dA. \end{aligned}$$

La integral de flujo es:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_D (x^2 + y^2 + 4)\, dA.$$

Puntaje: sustitución de $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{S}$ (8 pts), producto punto y simplificación (12 pts).

(c) **(20 pts)** En coordenadas polares, $x^2+y^2=r^2$, $dA = r\,dr\,d\theta$, con $r \in [0,2]$:

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= -\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2+4)\,r\,dr\,d\theta = -2\pi\int_0^2 (r^3+4r)\,dr \\ &= -2\pi\left[\frac{r^4}{4}+2r^2\right]_0^2 = -2\pi\,(4+8) \\ &= \boxed{-24\pi}.\end{aligned}$$

Puntaje: paso a polares correcto (8 pts), integración (8 pts), resultado con signo correcto (4 pts).

4. Considera el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left\langle \frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0 \right\rangle,$$

definido en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\} = \{(x,y,z) : x^2+y^2 > 0\}$. Sea C la circunferencia $x^2+y^2=1$, $z=1$, recorrida en sentido antihorario vista desde arriba.

(a) **(15 pts)** Calcula rot $\mathbf{F}$ en Ω.

(b) **(15 pts)** Calcula directamente $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

(c) **(15 pts)** Sea D el disco $x^2+y^2 \le 1$, $z=1$ (con normal $+\mathbf{k}$). ¿Por qué *no* se puede aplicar el Teorema de Stokes con la superficie D para calcular la integral de (b)? Explica con precisión.

(d) **(15 pts)** Sea S_ε el disco $x^2+y^2 \le \varepsilon^2$, $z=1$, con $0<\varepsilon<1$. Su frontera orientada positivamente es la circunferencia $C_\varepsilon : x^2+y^2=\varepsilon^2$, $z=1$, recorrida en sentido antihorario vista desde arriba. Considera la superficie anular A_ε acotada por C y C_ε (anillo en el plano $z=1$, con $\varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1$), a la que se excluye el eje z. Aplica el Teorema de Stokes a A_ε para deducir $\oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ y verifica que coincide con lo calculado en (b).

Solución:

(a) **(15 pts)** Escribimos $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$ con $P = -y/(x^2+y^2)$, $Q = x/(x^2+y^2)$, $R=0$.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y\rangle = \langle 0,\ 0,\ Q_x - P_y\rangle.$$

Las mismas derivadas que en el campo vórtice en $\mathbb{R}^2$:

$$Q_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad P_y = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Luego $Q_x - P_y = 0$, y por tanto rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en Ω.

Puntaje: planteamiento del rotor (5 pts), cálculo de Q_x y P_y (6 pts), conclusión (4 pts).

(b) **(15 pts)** Parametrizamos C: $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ 1\rangle$, $t \in [0, 2\pi]$, con $\mathbf{r}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 0\rangle$. Sobre C, $x^2 + y^2 = 1$, luego:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \langle -\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 0\rangle.$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \langle -\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 0\rangle \cdot \langle -\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 0\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi.$$

Puntaje: parametrización correcta (5 pts), cálculo del producto punto (6 pts), resultado 2π (4 pts).

(c) **(15 pts)** El Teorema de Stokes requiere que $\mathbf{F}$ sea de clase C^1 en toda la superficie y su interior. El disco $D = \{x^2 + y^2 \le 1,\ z = 1\}$ contiene el punto $(0, 0, 1)$, que pertenece al eje z (donde $x^2 + y^2 = 0$). En ese punto $\mathbf{F}$ *no está definido* (hay una singularidad). Por tanto, $\mathbf{F}$ no es C^1 en D y no se puede aplicar el Teorema de Stokes con esta superficie.

Puntaje: identificación del punto singular $(0, 0, 1) \in D$ (8 pts), argumento claro de por qué invalida Stokes (7 pts).

(d) **(15 pts)** El anular $A_\varepsilon = \{\varepsilon^2 \le x^2 + y^2 \le 1,\ z = 1\}$ no contiene ningún punto del eje z (pues $x^2 + y^2 \ge \varepsilon^2 > 0$), y $\mathbf{F}$ es C^1 allí. Podemos aplicar el Teorema de Stokes con la normal $+\mathbf{k}$:

$$\iint_{A_\varepsilon} (\operatorname{rot}\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA = \oint_{\partial A_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

La frontera orientada de A_ε (con normal $+\mathbf{k}$) tiene dos componentes: C en sentido antihorario y C_ε en sentido *horario* (la orientación inducida sobre la frontera interna es opuesta). Luego:

$$\oint_{\partial A_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Como $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en A_ε, la integral de superficie es cero:

$$0 = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \Longrightarrow \quad \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

Verificación directa: parametrizamos C_ε con $\mathbf{r}(t) = \langle \varepsilon \cos t,\ \varepsilon \operatorname{sen} t,\ 1\rangle$; entonces $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \langle -\operatorname{sen} t/\varepsilon,\ \cos t/\varepsilon,\ 0\rangle$ y $\mathbf{r}'(t) = \langle -\varepsilon \operatorname{sen} t,\ \varepsilon \cos t,\ 0\rangle$, luego $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, dando $\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. ✓

Puntaje: justificación de que Stokes aplica en A_ε (4 pts), orientación correcta de la frontera (5 pts), deducción de $\oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ (6 pts).