Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad De Matemáticas
Primer semestre 2023

**Interrogación 1**
**MAT1630 - Cálculo III**

1. Encuentre una parametrización para cada una de las siguientes curvas en el espacio.

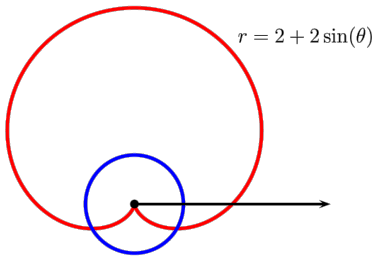
   (a) La curva que se obtiene al intersectar las superficies $x^2 + y^2 + 2z = 2$ y $y^2 + z^2 = 1$ en el conjunto en que $x \geq 0$. *Indicación: Puede asumir que* $z \leq 1$.

   (b) La curva que se obtiene al intersectar las rectas tangentes a $r(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ con $t \in \mathbb{R}$ y el plano $z = 0$. Muestre que la curva esta contenida en un círculo y encuentre el radio de este círculo.

2. Considere la curva en el plano dada en coordenadas polares por $r(\theta) = 2 + 2\sin(\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$.

   (a) Encuentre los valores de $\theta$ en que el vector tangente es paralelo al eje $x$ y distinto de 0.

   (b) Calcule la longitud de la porción de esta curva que está fuera del círculo de radio 1 (ver figura a continuación).




3. Considere la curva en el plano $r(t) = \left(\sin\frac{1}{t}, \cos\frac{1}{t}\right)$ con $t \in (0, 1]$. Encuentre la longitud de arco entre $t = \frac{1}{n\pi}$ y $t = 1$. Concluya que la curva tiene largo infinito para $t \in (0, 1]$.

4. Considere la curva en el espacio $r(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, t)$ para $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Encuentre una parametrización respecto a la longitud de arco para esta curva.

   (b) Encuentre los vectores unitarios tangente, normal y binormal en $t = \frac{\pi}{2}$.

   (c) Encuentre la curvatura en $t = \frac{\pi}{2}$.

**Solución Pregunta 1:**

**(a)** Utilizando coordenadas polares para la segunda curva podemos parametrizar $y = \cos\theta$, $z = \sin\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. Por otro lado, reemplazando $y^2$ en la primera ecuación tenemos que

$$x^2 + 1 - z^2 + 2z = 2.$$

Despejando,

$$x^2 = (z-1)^2.$$

Notemos que necesariamente $z \leq 1$. Por lo tanto $x = 1 - z$ si $x \geq 0$ (y $-x = 1 - z$ en caso contrario). Por lo tanto una parametrización de esta curva es

$$(1 - \sin\theta, \cos\theta, \sin\theta) \text{ con } \theta \in [0, 2\pi).$$

**(b)**

La recta tangente a esta curva en $t_0$ esta dada por

$$r(t_0) + r'(t_0)\lambda = (\cos t_0, \sin t_0, e^{t_0}) + \lambda(-\sin t_0, \cos t_0, e^{t_0}).$$

Por lo tanto la intersección con el plano $z = 0$ ocurre si $\lambda = -1$. En este punto

$$x = \cos t_0 + \sin t_0, \;\; y = -\cos t_0 + \sin t_0.$$

Para ver la curva en coordenadas polares calculamos

$$r^2 = x^2 + y^2 = \cos^2 t_0 + \sin^2 t_0 + 2\cos t_0 \sin t_0 + \cos^2 t_0 + \sin^2 t_0 - 2\cos t_0 \sin t_0 = 2.$$

Es decir, es un círculo de radio $\sqrt{2}$.

**Solución Pregunta 2:**

**(a)** La dirección de la recta recta tangente esta dada por el vector tangente $r'(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) + r(\theta)(-\sin\theta, \cos\theta)$. Este vector es identicamente 0 si

$$0 = (r')^2 + r^2 = 4 + 4\sin^2\theta + 8\sin\theta + 4\cos^2\theta = 8(1 + \sin\theta).$$

Por lo tanto requerimos $\theta \neq 3\frac{\pi}{2}$.

Por otro lado el vector es paralelo al eje $x$ si este vector tiene segunda componente igual a 0. Es decir,

$$r'(\theta)\sin\theta + r\cos\theta = 0.$$

Reemplazando $r$ obtenemos

$$2\cos\theta\sin\theta + 2(1 + \sin\theta)\cos\theta = 0.$$

Equivalentemente $\cos\theta = 0$ o $1 + 2\sin\theta = 0$.

Es decir, los posibles valores de $\theta$ son $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{11}{6}\pi$ y $\theta = \frac{7}{6}\pi$.

**(b)** Primero buscamos las intersecciones de estas dos curvas, esto es la solución a

$$1 = 2 + 2\sin\theta.$$

Esto corresponde a $\theta = \frac{7}{6}\pi$ y $\theta = \frac{11}{6}\pi$. Este último ángulo es equivalente a $-\frac{\pi}{6}$. Por otro lado, la figura es simétrica respecto al eje y, ya que $1+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = 1+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$. Por lo tanto, queremos calcular

$$\begin{aligned} 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2+(r')^2}d\theta &= 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4+4\sin^2\theta+8\sin\theta+4\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= 4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta \\ &= 4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}}d\theta \end{aligned}$$

Como $\cos\theta > 0$ para $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ tenemos que el largo es igual a

$$4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}d\theta = -\,8\sqrt{2}\sqrt{1-\sin\theta}\Big|_{\theta=-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\sqrt{3}.$$

**Solución Pregunta 3:** La longitud de esta curva esta dada por

$$\int_{\frac{1}{n\pi}}^{1} \sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4}+\frac{\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4}}dt = -\,\frac{1}{t}\Big|_{t=\frac{1}{n\pi}}^{1}$$

Es decir, el largo es $n\pi - 1$. Cuando $n \to \infty$ esto nos da el largo en el intervalo $(0,1]$ y converge a infinito.

**Solución Pregunta 4:**

**(a)** El parámetro de longitud de arco está dado por

$$s = \int_0^t \sqrt{(\cos^2\tau-\sin^2\tau)^2+(2\sin\tau\cos\tau)^2+1}d\tau = \sqrt{2}t.$$

Es decir, la parametrización en longitud de arco es

$$r(s) = \left(\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

**(b) y (c)**

Para caclular los vectores asociados, tomamos 2 derivadas de la parametrización anterior:

$$T = r'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)-\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 2\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1\right).$$

Utilizando las fórmulas de ángulo doble esto es

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(2\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(2\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1\right).$$

Tomando otra derivada, tenemos que

$$r''(s) = \left( -\sin\left(2\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(2\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right).$$

Por lo tanto el vector normal unitario es

$$N = \left( -\sin\left(2\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(2\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right),$$

y la curvatura $\kappa = 1$.

En $t = \frac{\pi}{2}$, tenemos que $s = \sqrt{2}\frac{\pi}{2}$. Los vectores unitarios buscados son $T = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$, $N = (0, -1, 0)$ y $B = T \times N = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$.