Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2016

MAT1630 $*$ Cálculo 3

1. Considere la curva cicloide de ecuaciones

$$x(t) = t - \sin(t) \qquad \text{y} \qquad y(t) = 1 - \cos(t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

   (a) Determine una parametrización respecto a longitud de arco.

   (b) Calcule la curvatura de la cicloide para $t = \pi$.

Solución.

(a) Comenzaremos determinando s como función de t,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du \\ &= \int_0^t \sqrt{2 - 2\cos(u)}\, du \qquad (\textbf{1 pto}) \\ &= 2\int_0^t \sin(u/2)\, du \\ &= 4(1 - \cos(t/2)) \qquad (\textbf{1 pto}) \end{aligned}$$

Despejando t tendremos

$$t = 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) \qquad (\textbf{1 pto})$$

Por lo tanto, una arcoparametrización respecto a longitud de arco es

$$\begin{aligned} x(s) &= 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) - \sin\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right) \qquad (\textbf{0.5 pto}) \\ y(s) &= 1 - \cos\left(2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right) \qquad (\textbf{0.5 pto}) \end{aligned}$$

(b) Calculemos la curvatura en $t = \pi$,

$$\kappa = \frac{\|\dot{\vec{r}}(\pi) \times \ddot{\vec{r}}(\pi)\|}{\|\dot{\vec{r}}(\pi)\|^3}$$

con $\dot{\vec{r}}(\pi) = (2, 0, 0)$ (**0.5 pto**) y $\ddot{\vec{r}}(\pi) = (0, -1, 0)$ (**0.5 pto**), por lo tanto, la curvatura es

$$\kappa = \frac{1}{4} \qquad (\textbf{1 pto})$$

Evaluación.

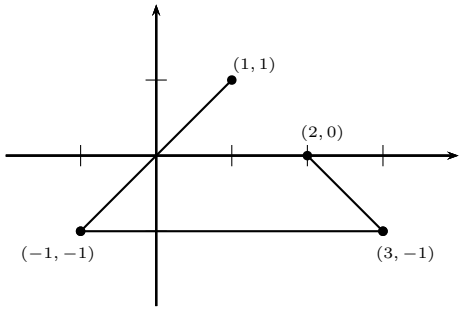
- Si el alumno calcula $T(s)$, a partir de la curva arcoparametrizada, asignar (**1 pto**).
- Si el alumno calcula $\dfrac{d}{ds}T(s)$, a partir de la curva arcoparametrizada, asignar (**0.5 pto**).
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar la curvatura a partir de la curva arcoparametrizada.

2. Considere el campo vectorial

$$F(x,y) = (y\cos(x) + \sin(y) + 1, \sin(x) + x\cos(y))$$

(a) Determine si F es o no un campo conservativo.

(b) Calcule $\int_C F \cdot d\vec{r}$ donde C es la curva que va desde $(1,1)$ hasta $(2,0)$, dada en la siguiente figura:



Solución.

(a) Primero notemos que F está definido en todo $\mathbb{R}^2$, que es una región abierta y simplemente conexa. Además, calculamos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos(x) + \cos(y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos(x) + \cos(y).$$

Por lo cual obtenemos que F es campo conservativo.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por demostrar, con algún método válido, que el campo vectorial es conservativo.

(b) Primera forma: Encontrando potencial y usar el teorema fundamental de las integrales de línea. Necesitamos en contrar función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x,y) = \nabla f(x,y)$. Así, calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) = y\cos(x) + \sin(y) + 1.$$

Entonces,

$$f(x,y) = y\sin(x) + x\sin(y) + x + g(y).$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x) + x\cos(y) + g'(y) = Q(x,y).$$

Entonces $g(y) = c$, con c constante. Por lo tanto,

$$f(x,y) = y\sin(x) + x\sin(y) + x + c.$$

Ahora, usando el Teorema fundamental, tenemos que

$$\int_C F \cdot dr = f(2,0) - f(1,1) = 2 + c - (2\sin(1) + 1 + c) = 1 - 2\sin(1).$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar la función potencial.
- Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral de línea.

Segunda forma: Usando que la integral de línea es independiente de camino.
Sea $\bar{C}$ parametrizada por $r(t) = (1-t)(1,1) + t(2,0), \quad t \in [0,1]$ la recta que va desde $(1,1)$ hasta $(2,0)$. Entonces,

$$\int_C F \cdot dr = \int_{\bar{C}} F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot dr &= \int_0^1 ((1-t)\cos(1+t)+\sin(1-t)+1, \sin(1+t)+(1+t)\cos(1-t))\cdot(1,-1)dt\\ &= \int_0^1 (1-t)\cos(1+t)+\sin(1-t)+1-\sin(1+t)-(1+t)\cos(1-t)dt\\ &= 1-2\sin(1).\end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por una parametrización de una curva que une los puntos.
- Asignar (**1 ptos**) por obtener la integral $\int_C F\cdot r'\,dt$ a calcular.
- Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral de línea.

Tercera forma: Por definición de integral de línea.
Tenemos que

$$\int_C F\cdot dr = \int_{C_1} F\cdot dr + \int_{C_2} F\cdot dr + \int_{C_3} F\cdot dr,$$

donde C_1, C_2, C_3 están parametrizadas por:

$$r_1(t)=(-t,-t),\ t\in[-1,1],\quad r_2(t)=(t,-1),\ t\in[-1,3],\quad r_3(t)=(3-t,t-1),\ t\in[0,1],$$

respectivamente.
Así, calculamos

$$\begin{aligned}\int_{C_1} F\cdot dr &= \int_{-1}^1 (-t\cos(-t)+\sin(-t)+1, \sin(-t)-t\cos(-t))\cdot(-1,-1)dt\\ &= \int_{-1}^1 2t\cos(t)+2\sin(t)-1dt\\ &= -2.\\ \int_{C_2} F\cdot dr &= \int_{-1}^3 (-\cos(t)+\sin(-1)+1, \sin(t)+t\cos(-1))\cdot(1,0)dt\\ &= \int_{-1}^3 -\cos(t)-\sin(1)+1dt\\ &= 4-5\sin(1)-\sin(3).\\ \int_{C_3} F\cdot dr &= \int_0^1 ((t-1)\cos(3-t)+\sin(t-1)+1, \sin(3-t)+(3-t)\cos(t-1))\cdot(-1,1)dt\\ &= \int_0^1 (1-t)\cos(3-t)-\sin(t-1)-1+\sin(3-t)+(3-t)\cos(t-1)dt\\ &= 3\sin(1)+\sin(3)-1.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_C F\cdot dr = 1-2\sin(1).$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por calcular la integral de línea en cada camino. (son tres caminos)
- Asignar (**1 ptos**) por el resultado correcto de la integral de línea.

3. Calcular

$$\int_\Gamma -y\,dx + x\,dy$$

siendo Γ la curva astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Solución. Parametrizamos el astroide:

$$x(t) = \cos^3(t), \quad y(t) = \sin^3(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Entonces,

$$dx = -3\cos^2(t)\sin(t)dt, \quad dy = 3\sin^2(t)\cos(t)dt.$$

Así, calculamos

$$\begin{aligned}\int_C -ydx + xdy &= \int_0^{2\pi} 3\sin^4(t)\cos^2(t) + 3\cos^4(t)\sin^2(t)dt \\ &= 3\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)dt \\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por una parametrización $\vec{r}(t)$ de una curva.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular correctamente $\dot{\vec{r}}(t)$.
- Asignar (**2 ptos**) por obtener la integral $3\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)dt$.
- Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral $3\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)dt$.

4. Calcular
$$\int_\Gamma \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dy + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz$$
siendo Γ la curva paramétrica $(t\cos(t), t\sin(t), t)$ con $t \in [\pi, 2\pi]$.

Solución.

Alternativa 1. Sea
$$I = \int_\Gamma \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dx + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dy + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz.$$

Sea
$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right).$$

Notar que la funcin $f(x,y,z) = -(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisface $\nabla f = F$. Luego, usando el teorema fundamental para integrales de línea tenemos que
$$I = f(2\pi\cos 2\pi, 2\pi\sin 2\pi, 2\pi) - f(\pi\cos\pi, \pi\sin\pi, \pi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}.$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por deducir que $F = \nabla f$, para el f de la solución.
- Asignar (**1 ptos**) por USAR el teorema fundamental de las integrales de línea (no es necesario que haya evaluado)
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $f(2\pi\cos 2\pi, 2\pi\sin 2\pi, 2\pi)$
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $f(\pi\cos\pi, \pi\sin\pi, \pi)$
- Asignar (**1 ptos**) por obtener correctamente el valor de I.

Alternativa 2. Usando la definición de integral de línea tenemos que
$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^{2\pi} \left(\frac{t\cos t(\cos t - t\sin t)}{(2t^2)^{3/2}} + \frac{t\sin t(\sin t + t\cos t)}{(2t^2)^{3/2}} + \frac{t}{(2t^2)^{3/2}}\right) dt \\ &= \int_\pi^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2}t^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**3 ptos**) por obtener que $I = \int_\pi^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2}t^2}$
- Asignar (**3 ptos**) obtener correctamente el valor de I.

5. Determine la masa de un alambre que resulta de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ si la densidad en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$ gramos por unidad de longitud de arco.

Solución. Una parametrización para la curva que representa al alambre es

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{2 + \sin(2t)}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{2 + \sin(2t)}}, -\frac{\sin(t) + \cos(t)}{\sqrt{2 + \sin(2t)}} \right)$$

para $t \in [0, 2\pi]$.

Luego la masa está dada por la integral

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \rho \, ds &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{2 + \sin(2t)}} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2 + \sin(2t)} \, dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{(2 + \sin(2t))^2} \, dt \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por obtener una parametrización.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular $\|\dot{\vec{r}}(t)\|$.
- Asignar (**2 ptos**) por obtener la integral $\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{(2 + \sin(2t))^2} \, dt$ o una equivalente (con integrando simplificado). Si el alumno da otra parametrización, asignar el puntaje por la integral a calcular siempre que el integrando esté simplificado.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular el valor de la masa.

6. Sea Γ una curva con arcoparametrización $\vec{\alpha}(s)$ y curvatura $\kappa(s)$ no nula que está contenida en un plano. Definamos γ una curva con parametrización

$$\vec{\beta}(s) = \alpha(s) + \frac{\vec{N}(s)}{\kappa(s)},$$

donde $\vec{N}(s)$ es el vector normal a la curva Γ en el punto $\vec{\alpha}(s)$. Demuestre que el vector tangente a la curva γ en el punto $\vec{\beta}(s)$ es paralelo al vector normal a curva Γ en el punto $\vec{\alpha}(s)$.

Solución. Supongamos que α está arcoparametrizada. Luego

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= T(s) + \left(\frac{N(s)}{\kappa(s)}\right)' \\
&= T(s) + \frac{N'(s)\kappa(s) - N(s)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \quad (\tau = 0) \\
&= T(s) + \frac{-\kappa^2(s)T(s) - N(s)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \\
&= \frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}N(s).
\end{aligned}$$

Esto termina la demostración.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por obtener

$$\beta'(s) = T(s) + \frac{N'(s)\kappa(s) - N(s)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}$$

- Asignar (**1 ptos**) por utilizar o mencionar que $\tau = 0$.
- Asignar (**1 ptos**) por utilizar o mencionar que $N'(s) = -\kappa(s)T(s)$.
- Asignar (**1 ptos**) por concluir que $\beta'(s) = \frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}N(s)$
- Asignar (**1 ptos**) por concluir que el tangente a la curva γ es paralelo al normal de la curva Γ.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa