Interrogación 2
Cálculo III - MAT 1630

1. Considere la curva $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1, 2t)$ con $t \in [0, 1]$ y la función de densidad $\rho(x, y) = y$. Calcule la coordenada x del centro de masa de $\mathbf{r}$.

2. Considere el siguiente campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle \frac{2x}{y}, \frac{1-x^2}{y^2} \rangle$. Encuentre el trabajo realizado por la el campo vectorial F al llevar una partícula desde $(1, 1)$ al punto $(2, 4)$, sin cruzar el eje $y = 0$.

3. Considere la elipse definida por la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, orientada positivamente, y C el camino sobre la elipse que va desde $(2, 0)$ hasta $(-2, 0)$. Calcule
$$\int_C (x + 2y)\, dx + (x - y)\, dy.$$
Indicación: Pueden ser útiles las identidades trigonométricas al reverso de la página

4. El astroide es la región del plano Cartesiano al interior de la curva $r(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$. Calcule su área. *Indicación: Pueden ser útiles las identidades trigonométricas al reverso de la página*

5. Muestre que si $f(x, y)$ satsisface la ecuación de Laplace
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$
entonces se cumple que
$$\int_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0,$$
para cualquier curva cerrada simple C.

Tiempo: 2 horas

Identidades trigonométricas:

1. $2\cos^2\theta = \cos(2\theta) + 1$.
2. $2\sin^2\theta = 1 - \cos(2\theta)$.
3. $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

Solución Interrogación 2
Cálculo III - MAT 1630

1. Primero calculamos la masa m de r:

$$m = \int_0^1 2t\sqrt{(2t)^2 + 2^2}dt = \frac{4}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{t=0}^{1} = \frac{4}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1)$$

La coordenada x esta dada por

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int x\rho\, ds.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{2}{m}\int_0^1 2(t^2-1)t\sqrt{t^2+1}dt \\
&= \frac{2}{m}\int_0^1 [2t\,(t^2+1)^{\frac{5}{2}} - 4\,t(t^2+1)^{\frac{3}{2}}]dt \\
&= \frac{2}{m}\left(\frac{2}{5}(t^2+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{t=0}^{1} \\
&= \frac{1}{5(2^{\frac{3}{2}}-1)}\left(7 - 8\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

2. Como no conocemos el camino, solo podremos calcular esto si F es conservativo en algun dominio que contenga los dos puntos pedidos. Por lo tanto, buscamos f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1-x^2}{y^2}.$$

Si intengramos la primera ecuación respecto a x tenemos

$$f = \frac{x^2}{y} + h(y).$$

Derivando esto respecto a y y usando la segunda ecuación tenemos

$$-\frac{x^2}{y^2} + h'(y) = \frac{1-x^2}{y^2}.$$

Por lo tanto

$$h'(y) = \frac{1}{y^2},$$

es decir $h(y) = -\frac{1}{y} + K$. Por lo tanto,

$$F = \nabla\left(\frac{x^2-1}{y}\right).$$

Notemos que esta campo esta bien definido en el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y > 0\}.$$

El trabajo pedido esta dado por

$$\int_C F \cdot dr = f(2,4) - f(1,1) = \frac{3}{4}.$$

3. Primero parametrizamos la elipse: $(2\cos\theta, 4\sin\theta)$ con $\theta \in [0,\pi]$ (el rango es solo el que describe el camino C.) Por lo tanto, la integral buscada es

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \left[(2\cos\theta + 8\sin\theta)(-2\sin\theta) + (2\cos\theta - 4\sin\theta)(4\cos\theta)\right] d\theta \\
&\quad = \int_0^\pi (-20\cos\theta\sin\theta - 16\sin^2\theta + 8\cos^2\theta) d\theta \\
&\quad = \int_0^\pi (-10\sin(2\theta) + 12\cos(2\theta) - 4) d\theta \\
&\quad = -5\cos(2\theta) + 6\sin(2\theta) - 4\theta|_0^\pi \\
&\quad = -4\pi
\end{aligned}$$

Otra solución:

Cerramos el dominio agregando la recta $L(x) = (x,0)$ con $x \in [-2,2]$. Por teorema de Green

$$\int_{C\cup L} (x+2y)\,dx + (x-y)\,dy = \iint_D (1-2) dA = -\text{Area}(D).$$

Primero calculamos

$$\int_L (x+2y)\,dx + (x-y)\,dy = \int_{-2}^2 x\,dx = 0.$$

Por otro lado, para calcular el área podemos considerar el dominio como

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-2,2] \text{ y } y \in [0, 4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\} \\ &= \{(2r\cos\theta, 4r\sin\theta : \ \theta \in [0,\pi] \text{ y } r \in [0,1]\}. \end{aligned}$$

El jacobiano en esta última parametrizacion esta dado por

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 4\sin\theta \\ -2r\sin\theta & 4r\cos\theta \end{vmatrix} = 8r.$$

Por lo tanto el área es

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 8r \, dr \, d\theta = 4\pi.$$

Concluimos que

$$\int_C (x+2y)\,dx + (x-y)\,dy = -4\pi.$$

4. Usamos el teorema de Green para observar que

$$\begin{aligned} 2\text{Area} &= \int_A x dy - y dx \\ &= 3\int_0^{2\pi} (\cos^3\theta \sin^2\theta \ \cos\theta - \sin^3\theta\cos^2\theta(-\sin\theta))d\theta \\ &= 3\int_0^{2\pi} (\sin^4\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^4\theta)d\theta \\ &= 3\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta \\ &= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta)d\theta \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} (1+\cos(4\theta))d\theta \\ &= \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área es $\frac{3}{8}\pi$.

5. Usamos el teorema de Green con $P = \frac{\partial f}{\partial y}$ y $Q = -\frac{\partial f}{\partial x}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy &= \int\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] dA \\ &= -\int\int_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dA = 0.\end{aligned}$$