

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad De Matemáticas
Primer semestre 2023

Examen
MAT1630 - Cálculo III

1. (a) Encuentre una parametrización para la curva que se forma al intersectar las superficies $z = y + 2$ y $x^2 + 2y^2 = z^2$ y bosqueje esta curva.

   (b) Encuentre los vectores tangente, normal y binormal en el punto $(2, 0, 2)$ de la curva dada por $\vec{r}(\theta) = (2\sqrt{2}\cos\theta, 2 + 2\sqrt{2}\sin\theta, 4 + 2\sqrt{2}\sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$.

   (c) Muestre que el largo L de la curva de la parte anterior cumple que

   $$L \leq 8\pi.$$

   Indicación: Recuerde que $\cos^2\theta \leq 1$.

2. Considere la superficie dada por $S(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2 - 1)$ con $r \geq 1$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

   (a) Encuentre un punto sobre la superficie en que el plano tangente es paralelo al plano $4x + z = 0$ y escriba la ecuación del plano tangente a la superficies en este punto.

   (b) Encuentre el área de la superficie S que esta sobre el plano $z = 0$ y dentro del paraboloide $z = 3 - x^2 - y^2$.

3. Considere el cilindro $S(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, z)$ con $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 5]$ y el campo vectorial $F(x, y, z) = (z, x, y)$.

   (a) Calcule directamente (sin utilizar el teorema de Stokes)

   $$\int_S \text{rot } F \cdot dS.$$

   (b) Calcule utilizando el teorema de Stokes

   $$\int_S \text{rot } F \cdot dS$$

   y verifique que su respuesta coincide con la de parte anterior.

4. Considere la superficie dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z > 0$ y $F = (e^{\tan(y)} + z^2, \cos(x^2) + 4, 1 + z)$. Calcule

   $$\iint_S F \cdot dS,$$

   considerando el vector normal con la componente z positiva.

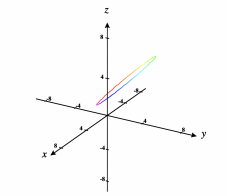
Solución examen
MAT1630 - Cálculo III

1. (a) **Encuentre una parametrización para la curva que se forma al intersectar las superficies $z = y + 2$ y $x^2 + 2y^2 = z^2$ y bosqueje esta curva.**

Reemplazando la primera ecuación en la segunda tenemos que $x^2 + 2y^2 = (y+2)^2$ o equivalentemente $x^2 + (y-2)^2 = 8$. Por lo tanto parametrizamos como

$$(2\sqrt{2}\cos\theta, 2 + 2\sqrt{2}\sin\theta, 4 + 2\sqrt{2}\sin\theta) \text{ con } \theta \in [0, 2\pi).$$

La última coordenada proviene de $z = y + 2 = 2 + 2 + 2\sqrt{2}\sin\theta$. El bosquejo de la curva es el siguiente



(b) **Encuentre los vectores tangente, normal y binormal en el punto $(2, 0, 2)$ de la curva dada por $(2\sqrt{2}\cos\theta, 2 + 2\sqrt{2}\sin\theta, 4 + 2\sqrt{2}\sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$.**

Este punto corresponde a $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir $\theta = 5\frac{\pi}{4}$ o $\theta = 7\frac{\pi}{4}$. Notemos que $\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\left(7\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto, como $2\sqrt{2}\cos\theta = 2$ tomamos $\theta = 7\frac{\pi}{4}$.
Para calcular los vectores buscados, tomamos

$$T = \frac{r'}{\|r'\|} = \frac{(-2\sqrt{2}\sin\theta, 2\sqrt{2}\cos\theta, 2\sqrt{2}\cos\theta)}{\|(-2\sqrt{2}\sin\theta, 2\sqrt{2}\cos\theta, 2\sqrt{2}\cos\theta)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}(-\sin\theta, \cos\theta, \cos\theta)$$

$$\|T'\|N = T' = \frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}(-\sin\theta, \cos\theta, \cos\theta) - \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}(\cos\theta, \sin\theta, \sin\theta)$$

$$B = T \times N = \frac{1}{\|N\|}(0, 1, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$$

Evaluando en el punto buscado tenemos que

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$
$$N = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)$$
$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$$

(c) **Muestre que el largo L de la curva de la parte anterior cumple que**

$$L \leq 8\pi.$$

Indicación: Recuerde que que $\cos^2\theta \leq 1$.

Por definición

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\theta}d\theta \\ &\leq 4\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

2. **Considere la superficie dada por** $S(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2-1)$**.**

(a) **Encuentre un punto sobre la superficie en que el plano tangente es paralelo al plano** $4x+z=0$ **y escriba la ecuación del plano tangente.**

Los vectores tangentes a la superficies estan dados por

$$T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 2r)$$
$$T_\theta = r(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

Por lo tanto el vector normal es $N = T_r \times T_\theta = r(-2r\cos\theta, -2r\sin\theta, 1)$ y debe ser paralelo a $(4,0,1)$, es decir imponemos $-2r^2\cos\theta = 4\lambda$, $-2r\sin\theta = 0$ y $r = \lambda$. Concluimos $\theta = \pi$ o $\theta = 0$. Usando la primera ecuación y que $r \geq 0$ concluimos que $\theta = \pi$ y $r = 2$. Es decir, el punto de la superficie es $(-2,0,3)$ y el plano tangente tiene ecuación

$$4x + z = -5$$

.

(b) **Encuentre el área de la superficie** S **que esta sobre el plano** $z=0$ **y dentro del paraboloide** $z = 3 - x^2 - y^2$**.**

Notemos que las ecuaciones nos dicen $0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2$. Utilizando la parametrización, esto es equivalente a $r \geq 1$ y $r^2 - 1 \leq 3 - r^2$. Esta última ecuación es equivalente a $2r^2 \leq 4$. Es decir, $1 \leq r \leq \sqrt{2}$ y

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \|r(-2r\cos\theta, -2r\sin\theta, 1)\| dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2} dr d\theta \\
&= 2\pi \left.\frac{2(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{3\times 8}\right|_{r=1}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{6}[9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}]
\end{aligned}$$

3. **Considere el cilindro** $S(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, z)$ **con** $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 5]$ **y el campo vectorial** $F(x, y, z) = (z, x, y)$.

   (a) **Calcule directamente (sin utilizar el teorema de Stokes)**

$$\int_S \textbf{rot } F \cdot dS.$$

   Notemos primero que rot $(F) = \left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (1, 1, 1)$. La normal exterior del cilindro esta dada por $N = (-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0) \times (0, 0, 1) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)$
   Por lo tanto,

$$\iint \text{rot } (F) \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^5 (3\cos\theta + 3\sin\theta) dz d\theta = 0.$$

   (b) **Calcule utilizando el teorema de Stokes**

$$\int_S \textbf{rot } F \cdot dS$$

   y verifique que su respuesta coincide con la de parte anterior.

   Las fronteras son $\gamma_1(\theta) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 5)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ orientada en sentido horario y $\gamma_2(\theta) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ orientada en sentido anti-horario.
   El teorema de Stokes implica que

$$\iint \text{rot } (F) \cdot dS = -\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma.$$

   Por otro lado,

$$\begin{aligned} -\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma &= -\int_0^{2\pi} (5, 3\cos\theta, 3\sin\theta) \cdot (-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0) d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (0, 3\cos\theta, 3\sin\theta) \cdot (-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0) d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} (-15\sin\theta + 9\cos^2\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} 9\cos^2\theta d\theta \\ &= 15\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

   Es decir,

$$\iint \text{rot } (F) \cdot dS = -\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma.$$

4. **Considere la superficie dada por** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ **y** $z > 0$ **y** $F = (e^{\tan(y)} + z^2, \cos(x^2) + 4, 1 + z)$**.**

   Calcule

$$\iint_S F \cdot dS,$$

   considerando el vector normal con la componente z **positiva.**

   Tomamos es volumen contenido sobre el plano $z = 0$ y bajo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Denotamos por D la superficie en el plano $z = 0$.

   De acuerdo al teorema de la divergencia

$$\iiint \text{ div } F dV = \iint_S F \cdot dS + \iint_D F \cdot dS.$$

   Como div $F = 1$ y la normal de D es $-(0, 0, 1)$, tenemos

$$\frac{2}{3}\pi = \iiint 1 dV = \iint_S F \cdot dS + \iint_D F \cdot dS = \iint_S F \cdot dS - \pi.$$

   Concluimos

$$\iint_S F \cdot dS = \frac{5}{3}\pi.$$