

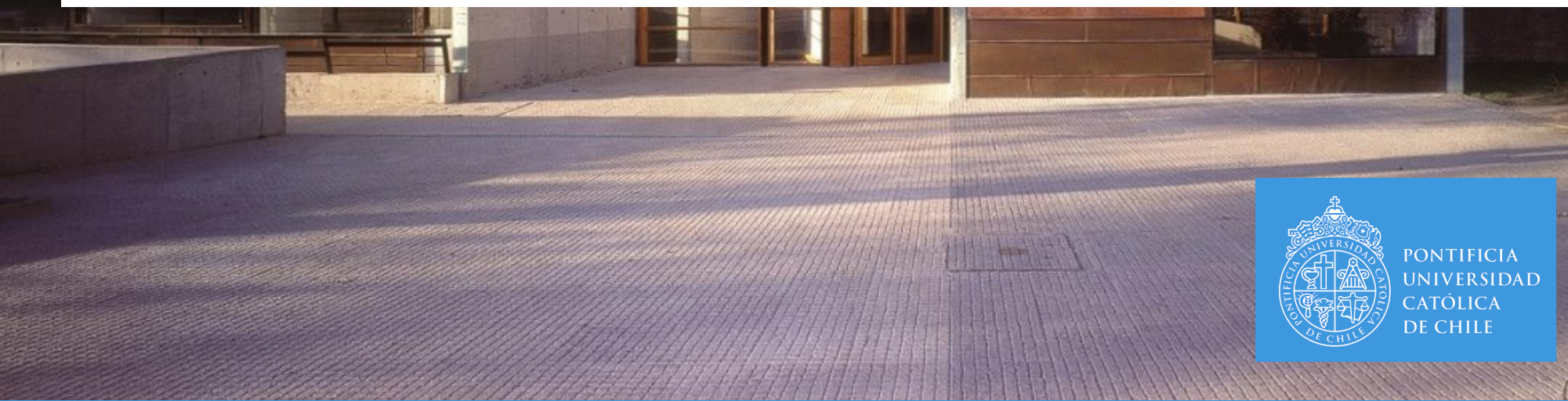
Curvatura y Torsión para curvas arcoparametrizadas

Cálculo III - MAT1630

Rodrigo Vargas

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

5 de enero de 2023



Curvatura y Torsión para curvas arcoparametrizadas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

En esta clase todas las curvas que consideremos estarán parametrizadas por longitud de arco, es decir, $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Cuando una curva está arcoparametrizada, por convención se usa el parámetro s.

Considere una curva $\alpha : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$ arcoparametrizada. Dado que el vector tangente $\alpha'(s)$ tiene longitud 1, la norma $\|\alpha''(s)\|$ mide la tasa de cambio del ángulo de tangentes próximas que forman con la tangente en el punto s.

Definición.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva arcoparametrizada. Definimos la **curvatura** de α en s por

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| .$$

Observación. La curvatura de una curva $\kappa(s) = 0$ para todo $s \in I$ si y solo si α está contenida en una recta. Para todo $s \in I$ se cumple

$$\begin{aligned} \kappa(s) = 0 &\iff \|\alpha''(s)\| = 0 \\ &\iff \alpha''(s) = \vec{0} \\ &\iff \alpha'(s) = \vec{a} \\ &\iff \alpha(s) = \vec{a}s + \vec{b} \end{aligned}$$

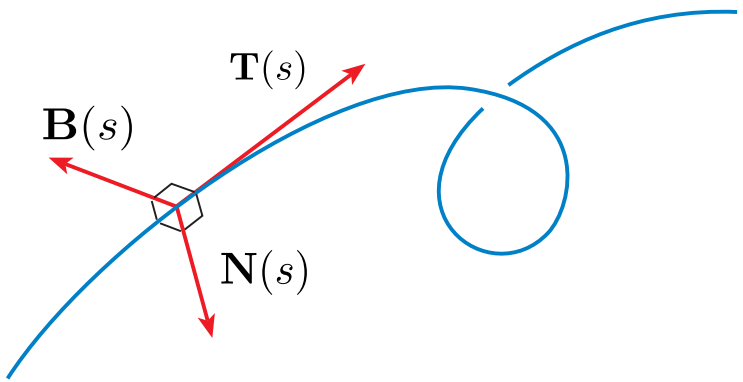
donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores constantes. Se sigue que α es la parametrización de una recta (o segmento de recta).

Observación. $\|\alpha'(s)\| = 1 \iff \alpha''(s) \perp \alpha'(s)$

Curvatura y Torsión para curvas arcoparametrizadas

Definición.

- Definimos el vector tangente unitario de α en s por $T(s) = \alpha'(s)$.
- Definimos el vector normal unitario $N(s)$ como el vector unitario que está en la dirección de $\alpha''(s)$. Este vector es perpendicular al vector tangente unitario $T(s)$
- Definimos el vector binormal unitario $B(s)$ de la curva α en s mediante $B(s) = T(s) \times N(s)$.



Curvatura y Torsión para curvas arcoparametrizadas

Ya sabemos que $N(s)$ está la misma dirección que $\alpha''(s)$ y que $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ entonces se sigue que

$$\boxed{\alpha''(s) = \kappa(s)N(s)}$$

Definición.

- El plano osculador está generado por los vectores tangente y normal unitarios.
- El plano normal está generado por los vectores normal y binormal unitarios.

La norma $\|B'(s)\|$ mide la tasa de cambio de los planos osculadores cercanos con respecto al plano osculador en s, es decir $B'(s)$ mide cuan rápido la curva se desvía de su plano osculador. Esto nos permite definir:

Definición.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva arcoparametrizada con $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. Definimos la **torsión** de la curva α en s por

$$\tau(s) = \|B'(s)\| .$$

Observación. La torsión $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$ si y solo si α está contenida en un plano.
En efecto, para todo $s \in I$ se tiene

$$\tau(s) = 0 \Longleftrightarrow \|B'(s)\| = 0 \Longleftrightarrow B'(s) = \vec{0} \Longleftrightarrow B(s) = \vec{a}$$

donde $\vec{a}$ es un vector constante. Se sigue que la curva está contenida en el plano cuyo vector normal es $\vec{a}$.

EJEMPLO 1 Demuestre que la curvatura de una circunferencia de radio r es constante e igual a $\frac{1}{r}$.

EJEMPLO 2 Considere la hélice arcoparametrizada

$$\alpha(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\omega}\right), a\sin\left(\frac{s}{\omega}\right), \frac{bs}{\omega} \right)$$

donde $\omega = \sqrt{a^2 + b^2}$. Calcule la curvatura y la torsión de α.

Teorema. (Ecuaciones de Frenet-Serret)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva arcoparametrizada con curvatura no nula. Entonces

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

Demostración. Tenemos que $T(s) = \alpha'(s)$ entonces

$$T'(s) = \alpha''(s) = \kappa(s)N(s)\,.$$

Ahora bien, como $B(s) = T(s) \times N(s)$ entonces

$$\begin{aligned} B'(s) &= T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) \\ &= \kappa(s) \underbrace{(N(s) \times N(s))}_{0} + T(s) \times N'(s) \\ &= T(s) \times N'(s)\,. \end{aligned}$$

Hemos obtenido que $B'(s) = T(s) \times N'(s)$ entonces $T(s) \perp B'(s)$.
Como $\|B(s)\| = 1$ entonces $B(s) \perp B'(s)$ lo que implica que $B(s)$ está en el plano osculador.
Por lo tanto, $B'(s)$ es paralelo a $N(s)$ y además $\|B'(s)\| = \tau(s)$ se sigue que $B'(s) = -\tau(s)N(s)$.