FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Interrogación 1
MAT1630 - Cálculo III

1. Dada la curva paramétrica definida por:

$$x(t) = t^3 - 3t, \quad y(t) = t^2 - 4t,$$

   (a) Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente a $t = 2$.

   (b) Encuentra la ecuación de la recta tangente en ese punto.

   Solución:

   (a) **Solución (30 puntos)**: La pendiente de la recta tangente es $\frac{dy/dx}{dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. Calculamos: $x'(t) = 3t^2 - 3, \quad y'(t) = 2t - 4$. En $t = 2$: $x'(2) = 3(4) - 3 = 9, \quad y'(2) = 4 - 4 = 0$. Pendiente: $\frac{0}{9} = 0$. **Puntaje**: - Derivar $x(t)$ y $y(t)$ correctamente (10 pts). - Evaluar en $t = 2$ (10 pts). - Calcular $\frac{dy}{dx}$ (10 pts).

   (b) **Solución (30 puntos)**: Primero hallamos el punto: $x(2) = 8-6 = 2$, $y(2) = 4 - 8 = -4$. Ecuación de la recta con pendiente 0: $y = -4$. **Puntaje**: - Calcular $x(2)$ e $y(2)$ (10 pts). - Plantear ecuación general de la recta (10 pts). - Respuesta final correcta (10 pts).

2. Calcula la longitud de la porción de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$ que se encuentra dentro de la circunferencia $r = \frac{1}{2}$. *Indicación*: Justifica los límites de integración adecuados y muestra todos los pasos de la integral.

   Solución: 1. **Intersección entre las curvas (15 puntos)**: Resolvemos $1 - \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$. Las soluciones en $[0, 2\pi)$ son $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $\theta = \frac{5\pi}{3}$. **Nota**: Por simetría de la cardioide, la región dentro de $r = \frac{1}{2}$ corresponde a $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

   2. **Fórmula de longitud de arco (15 puntos)**:

$$L = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

   Derivada: $\frac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta$. Sustituyendo:

$$\sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{2 - 2\cos\theta}.$$

3. **Simplificación del integrando (15 puntos)**: Usando $1 - \cos\theta = 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

$$\sqrt{2 - 2\cos\theta} = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\left|\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

En $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ es positivo, así que:

$$\sqrt{2 - 2\cos\theta} = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

4. **Evaluación de la integral (15 puntos)**:

$$L = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4\int_{0}^{\pi/3} \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad \text{(por simetría)}.$$

Haciendo $u = \frac{\theta}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}d\theta$:

$$L = 8\int_0^{\pi/6} \mathrm{sen}\,u\,du = 8\left[-\cos u\right]_0^{\pi/6} = 8\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 - 4\sqrt{3}.$$

Respuesta final: $L = 8 - 4\sqrt{3}$.

3. Para la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\rangle$:

   (a) Calcula el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$.

   (b) Encuentra la curvatura $\kappa(t)$.

   (c) Determina el vector normal principal $\mathbf{N}(t)$.

   Solución:

   (a) **Solución (20 puntos)**: $\mathbf{r}'(t) = \langle e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}\rangle$. $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$. $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \left\langle \frac{e^t}{e^t+e^{-t}}, \frac{-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}, \frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}} \right\rangle$.
   Puntaje: - Derivar $\mathbf{r}(t)$ (5 pts). - Calcular magnitud (10 pts). - Vector unitario correcto (5 pts).

   (b) **Solución (20 puntos)**: Calculamos $\mathbf{T}'(t)$ derivando cada componente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t}{e^t + e^{-t}}\right) = \frac{2}{(e^t + e^{-t})^2},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{-e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\right) = \frac{2}{(e^t + e^{-t})^2},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{2}}{e^t + e^{-t}}\right) = \frac{-\sqrt{2}(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Entonces:

$$\mathbf{T}'(t) = \left\langle \frac{2}{(e^t+e^{-t})^2}, \frac{2}{(e^t+e^{-t})^2}, \frac{-\sqrt{2}(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2} \right\rangle$$

Magnitud de $\mathbf{T}'(t)$:

$$|\mathbf{T}'(t)| = \frac{\sqrt{8+2(e^t-e^{-t})^2}}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{\sqrt{2}(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}.$$

Curvatura:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\sqrt{2}/(e^t+e^{-t})}{e^t+e^{-t}} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

Puntaje: - Derivar todas las componentes de $\mathbf{T}(t)$ (8 pts). - Calcular $|\mathbf{T}'(t)|$ correctamente (8 pts). - Aplicar fórmula de curvatura (4 pts).

(c) **Solución (20 puntos)**: $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{(e^t+e^{-t})}{\sqrt{2}}\mathbf{T}'(t)$. Sustituyendo $\mathbf{T}'(t)$:

$$\mathbf{N}(t) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}, \frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}, \frac{-(e^t-e^{-t})}{e^t+e^{-t}} \right\rangle.$$

Puntaje: - Aplicar definición de $\mathbf{N}(t)$ (10 pts). - Simplificar usando $\mathbf{T}'(t)$ y $|\mathbf{T}'(t)|$ (10 pts).

4. Sea la hélice circular $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \rangle$.

(a) Calcula el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$.

(b) Encuentra la curvatura $\kappa(t)$ y el vector normal principal $\mathbf{N}(t)$.

(c) Determina el vector binormal $\mathbf{B}(t)$ y la torsión $\tau(t)$.

(d) Verifica que se cumple la primera fórmula de Frenet-Serret:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}.$$

Solución:

(a) **Vector tangente unitario (15 puntos)**:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 1 \rangle \quad (5 \text{ puntos})$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2} \quad (5 \text{ puntos})$$

$$\mathbf{T}(t) = \left\langle \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \quad (5 \text{ puntos})$$

(b) **Curvatura y vector normal (15 puntos)**:

$$\mathbf{T}'(t) = \left\langle \frac{-\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, 0 \right\rangle \quad (5 \text{ puntos})$$
$$\kappa = \frac{1}{2} \quad (5 \text{ puntos})$$
$$\mathbf{N}(t) = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0 \rangle \quad (5 \text{ puntos})$$

(c) **Vector binormal y torsión (15 puntos)**:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \left\langle \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, \frac{-\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \quad (5 \text{ puntos})$$
$$\mathbf{B}'(t) = \left\langle \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, 0 \right\rangle \quad (5 \text{ puntos})$$
$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5 \text{ puntos})$$

(d) **Verificación de Frenet-Serret (15 puntos)**:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5 \text{ puntos})$$
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left\langle \frac{-\cos t}{2}, \frac{-\operatorname{sen} t}{2}, 0 \right\rangle \quad (5 \text{ puntos})$$
$$\kappa\mathbf{N} = \left\langle \frac{-\cos t}{2}, \frac{-\operatorname{sen} t}{2}, 0 \right\rangle \quad (5 \text{ puntos})$$

Instrucciones:

- Cada pregunta vale 60 puntos, las partes de una pregunta valen lo mismo.
- Justifica cada paso en las demostraciones.
- Simplifica las expresiones algebraicamente cuando sea posible.
- Duración: 120 minutos.