MAT–1630 - CALCULO III
EXAMEN
Primer Semestre 2018

1. *a*) Calcule el valor de la integral de línea siguiente:

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

con C es la parte del arco $y = 2x^2 - 1$ que parte de $(1, 1)$ y termina en $(0, -1)$.

b) Calcule el valor de la integral de línea $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + y}{x^2 + y^2} \right)$$

y γ es una curva suave cerrada simple que encierra $(0, 0)$ recorrida en sentido antihorario.

Solución. Parte a)

Llamemos $F = (P, Q)$ con $P(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

El campo es conservativo puesto que

$$\begin{aligned} P_y - Q_x &= \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2}{x^2 + y^2} = 0. \end{aligned}$$

Verifica condición **1.0 ptos**

La integral de línea no depende de la curva siempre que se evite el origen.

Concluye independencia **0.5 ptos**

Elijamos el camino poligonal: trozo recto L_1 $(0, -1)$ a (1,-1) y trozo recto L_2 (1,-1) a (1,1). Como está orientado al revés se obtiene que

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = -\int_{L_1 \cup L_2} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = -\int_{L_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \int_{L_2} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Calculando, $L_1 : (t, -1) \quad , 0 \leq t \leq 1$

$$\int_{L_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{4}\,.$$

Calculando, $L_2 : (1, t) \quad , -1 \leq t \leq 1$

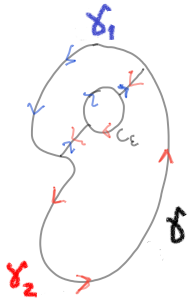
$$\int_{L_2} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Luego el valor de la integral de línea es : $-\frac{3\pi}{4}$. Calcula la integral **1.5 ptos**

Error de signo se resta **0.5 ptos**

Solución. Parte b)

Se construye un círculo C_ϵ de centro en $(0,0)$ y radio ϵ como muestra la figura orientado contrario al horario,



Llamemos $F = (P, Q)$ con $P(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ y $Q(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

El campo es conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ puesto que

$$P_y - Q_x = \frac{-1}{x^2+y^2} - \frac{(x-y)2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)2x}{(x^2+y^2)^2} = 0\,.$$

Verifica condicion **0.5 ptos**

Como la curva cerrada γ rodea al origen, que es una singularidad del campo $\vec{F}$, no podemos aplicar que la integral a lo largo de γ es cero. Sin embargo, como muestra la figura podemos descomponer el camino,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_\epsilon} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ Descomposición integral **0.5 ptos**

Los pedazos que unen el cículo con γ se simplifican entre si pues es el mismo camino recorrido en direcciones opuestas. Argumenta igualdad anterior **0.5 ptos**

Las curvas cerradas γ_1 y γ_2 no rodean al origen. Luego, como el campo $\vec{F}$ es conservativo sus integrales son cero.

Resumiendo,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_\epsilon} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,.$$ Argumenta igualdad **0.5 ptos**

Se parametriza el camino circular : $\beta(t) = (\epsilon\cos t, \epsilon\,\mathrm{sen}\, t)\,:\, 0 \le t \le 2\pi$ obteniéndose que:

$$\begin{aligned}\int_{C_\epsilon} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon^2}(\epsilon\cos t - \epsilon\,\mathrm{sen}\, t)(-\epsilon\,\mathrm{sen}\, t)dt + \frac{1}{\epsilon^2}(\epsilon\cos t + \epsilon\,\mathrm{sen}\, t)(\epsilon\,\cos\, t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt \\ &= 2\pi\,.\end{aligned}$$ Calcula integral en C_ϵ **1.0 ptos**

2. Considere S la porción del plano $x+y+z=1$ que está dentro del cilindro $x^2+y^2=1$ y llamemos C a la curva frontera de S. Calcule el área de S utilizando el Teorema de Stokes.

Solución.

El Teorema de Stokes asegura que para una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con frontera una curva C^1,

$$\int_{\delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S F \times \nabla \cdot \vec{n}\, dS$$

con $\vec{n}$ normal exterior unitario exterior a S. Explicita Teorema de Stokes **0.5 ptos**

Un vector normal a la superficie S es cualquier múltiplo de $N = (1,1,1)$ pues este vector es el vector normal al plano $x+y+z=1$ y la superficie está contenida en ese plano. Luego, la normal unitaria a S en la dirección correcta es $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Calcula o deduce $\vec{n}$ **1.5 ptos**

La igualdad del Teorema de Stokes se escribe como:

$$\int_{\delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S (F \times \nabla) \cdot (1,1,1)\, dS\,.$$

Elegimos un campo adecuado de tal manera que $(F\times\nabla)\cdot(1,1,1)$ sea constante no nula, por ejemplo si $\vec{F}(x,y,z) = (-y,0,0)$. Construir campo adecuado **1.0 ptos**

Entonces

$$(F \times \nabla) = (0,0,1) \Longrightarrow (F \times \nabla) \cdot (1,1,1) = 1\,. \qquad \text{Calcula Rotor } \textbf{1.0 ptos}$$

De esta manera se obtiene que

$$\sqrt{3} \int_{\delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S dS \Longrightarrow A(S) = \sqrt{3} \int_{\delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad \text{Calcula } \textbf{1.0 ptos}$$

Una parametrización de δS es

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - \cos t - u\operatorname{sen} t)\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Calculamos la integral de línea, Calcula la integral de línea **1.0 ptos**

$$\int_{\delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)\, dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = \pi$$

El área de S es $A(S) = \pi\sqrt{3}$.

3. Se define el campo $\vec{F}(x,y,z) = (x+yz, Q(x,y,z), x^2+y^2+2z)$ con Q una función C^1 en $\mathbb{R}^3$ y $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = -1$. Evalue el flujo

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

donde S es la porción del paraboloide $z = 1-x^2-y^2$ con $z \geq 0$ y $\vec{n}$ es la normal unitaria apuntando hacia afuera.

Solución.

Cerramos la superficie S con la tapa plana $T : x^2+y^2 \leq 1, z = 0$, y aplicamos el Teorema de la Divergencia. Cerrar la superficie (agregar tapa) **0.5 ptos**

Así la integral pedida, $J = \int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ es igual a

$$J = \iiint_{0\leq z\leq 1-x^2-y^2} \nabla\cdot\vec{F}\,dxdydz - \iint_T \vec{F}\cdot(0,0,-1)\,dxdy\,.$$ Aplica el TD **1.5 ptos**

Además la divergencia es : $\nabla\cdot\vec{F} = 2$. Calcula la divergencia del campo **1.5 ptos**

La integral triple es

$$2\iint_{x^2+y^2\leq 1}(1-x^2-y^2)dxdy = \pi\,,$$ Calcula la integral **1.0 ptos**

cambiando a polares por ejemplo. Considerando los dos signos menos, el segundo término queda igual a

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)dxdy = \pi/2\,,$$ Calcula la integral triple **1.0 ptos**

de modo que el flujo original es igual a $3\pi/2$. Calcula el flujo **0.5 ptos**

4. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\phi(u,v), (u,v) \in D \subset (0,\infty) \times \mathbb{R}$. Suponga que $\phi(u,v)$ tiene segundas derivadas continuas en D que satisfacen:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}(u,v) = 0, \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}(u,v) = \frac{1}{u}\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v), \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}(u,v) = -\frac{1}{u}\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v),$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v) \perp \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v), \qquad ||\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)|| = 1, \qquad ||\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)|| = u.$$

Sea C la curva parametrizada por $r(t) = \phi(t^2,t), t > 0$. Calcule la curvatura de C en el punto $r(1)$.

Solución.

Calculamos $r'(t)$ derivando:

$$r'(t) = 2t\frac{\partial\phi}{\partial u}(t^2,t) + \frac{\partial\phi}{\partial v}(t^2,t). \qquad \boxed{\text{Calcula } r'(t) \quad \textbf{1.0 ptos}}$$

Derivando nuevamente y reemplazando según las propiedades del enunciado obtenemos $r''(t)$,

$$\begin{aligned} r''(t) =& 2\frac{\partial\phi}{\partial u}(t^2,t) + 4t^2\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}(t^2,t) + 2t\frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial u}(t^2,t) + 2t\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}(t^2,t) + \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}(t^2,t), \\ =& 2\frac{\partial\phi}{\partial u}(t^2,t) + 0 + 4t\left[\frac{1}{t^2}\frac{\partial\phi}{\partial v}(t^2,t)\right] + \left[-\frac{1}{t^2}\frac{\partial\phi}{\partial u}(t^2,t)\right], \\ =& \left(2 - \frac{1}{t^2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial u}(t^2,t) + \frac{4}{t}\frac{\partial\phi}{\partial v}(t^2,t). \qquad \boxed{\text{Calcula } r''(t) \quad \textbf{2.0 ptos}} \end{aligned}$$

Luego, en $t = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} r'(1) =& 2\frac{\partial\phi}{\partial u}(1,1) + \frac{\partial\phi}{\partial v}(1,1), \qquad \boxed{\text{Evalua } r'(1) \quad \textbf{0.5 ptos}} \\ r''(1) =& \frac{\partial\phi}{\partial u}(1,1) + 4\frac{\partial\phi}{\partial v}(1,1). \qquad \boxed{\text{Evalua } r''(1) \quad \textbf{0.5 ptos}} \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial\phi}{\partial u} \perp \frac{\partial\phi}{\partial v}$ se tiene que

$$r'(1) \times r''(1) = (8-1)\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}. \qquad \boxed{\text{Calcula producto cruz} \quad \textbf{1.0 ptos}}$$

Como además de ser perpendiculares, $||\frac{\partial\phi}{\partial u}(1,1)|| = 1$ y $||\frac{\partial\phi}{\partial v}(1,1)|| = 1$, concluimos

$$\begin{aligned} ||r'(1)|| &= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \\ ||r'(1) \times r''(1)|| &= 7, \end{aligned}$$

y por lo tanto, la curvatura de C en $r(1)$ es $\qquad \boxed{\text{Calcula curvatura} \quad \textbf{1.0 ptos}}$

$$\kappa = \frac{||r'(1) \times r''(1)||}{||r'(1)||^3} = \frac{7}{5\sqrt{5}}.$$