# Solución

**P11** $x^2+y^2=z \quad \cap \quad x^2+y^2+z^2=6$

Función Auxiliar $\rightarrow$ $x(\tau)=\rho(\tau)\cos\tau \quad \cap \quad y(\tau)=\rho(\tau)\operatorname{sen}\tau$

Reemplazando en la 1ra ec.

$$(\rho(\tau)\cos\tau)^2+(\rho(\tau)\operatorname{sen}\tau)^2=z$$

$$\Rightarrow \quad \rho^2(\tau)=z$$

Reemplazando en la 2da ec.

$$(\rho(\tau)\cos\tau)^2+(\rho(\tau)\operatorname{sen}\tau)^2+(\rho^2(\tau))^2=6$$

$$\Rightarrow \underbrace{\rho^2(\tau)+\rho^4(\tau)=6}_{\text{Ecuación usado } u}$$

Sea $\rho^2(\tau)=\alpha \quad \rightarrow \rho^4(\tau)=\alpha^2$

Reemplazando

$$\alpha^2+\alpha=6$$

$\rightarrow \quad \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \Rightarrow \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} \nearrow \alpha_1 = 2 \\ \searrow \alpha_2 = -3 \end{cases}$

Ahora, como $\alpha = \rho^2(t)$

$2 = \rho^2(t) \quad \vee \quad -3 = \rho^2(t)$

$\boxed{\sqrt{2} = \rho(t)} \quad \vee \quad \cancel{\sqrt{-3} = \rho(t)}$ → No raíz negativa

∴ La $\cap$ se parametriza como

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t \\ z(t) = 2 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

¿Qué $t$ nos da $(1,1,2)$? → $t = \frac{\pi}{4}$

$r'(t) = (-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t, 0) \Rightarrow r'(\pi/4) = (-1, 1, 0)$

$r''(t) = (-\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\operatorname{sen} t, 0) \Rightarrow r''(\pi/4) = (-1, -1, 0)$

∴ $u(\pi/4) = (-1, 1, 0)$ Tangente no unitario

$v(\pi/4) = r'(\pi/4) \times r''(\pi/4) = (-1,1,0) \times (-1,-1,0) = (0,0,2)$ Binormal

$w(\pi/4) = v(\pi/4) \times u(\pi/4) = (0,0,2) \times (-1,1,0) = (-2,-2,0)$ Normal no unitario

Plano Osculador → conformado por T y N

$\Rightarrow$ B es $\perp$ al plano

$$\Rightarrow (0,0,2)\cdot\big((x,y,z)-(1,1,2)\big)=0$$

$$\Rightarrow 0(x-1)+0(y-1)+2(z-2)=0$$

$$\Rightarrow z=2 \quad //$$

Ahora, para el tangente unitario

$$T=\frac{u}{|u|} \Rightarrow T=\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}$$

Binormal

$$B=\frac{v}{|v|}=\frac{(0,0,2)}{2}=(0,0,1)$$

Normal unitario

$$N=\frac{u\times v}{|u\times v|}=\frac{(-2,-2,0)}{\sqrt{8}}$$

# P2)

Se busca el punto T que nos cumple la condición de paralelismo entre el vector director de la recta y nuestro vector tangente a la curva.

Vector tangente: $f'(T) = \left(\frac{1}{1+T^2}, \frac{1}{(1+T)^2}, \frac{1}{\sqrt{1+T^2}}\right)$

Vector director recta:

$1 \cdot X + 1 = 1 \cdot Y - 1 = 1 \cdot Z - 2$

→ Los números que acompañan a $x, y, z$.

es directo que el vector director es $(1,1,1)$

Otra forma: Igualando al parámetro T

$X+1 = T \quad \wedge \quad Y-1 = T \quad \wedge \quad Z-2 = T$

Armando la ec. paramétrica.

$$F(T) = (T-1, T+1, T+2)$$

$$F(T) = (-1, 1, 2) + T(1,1,1)$$

(1,1,1): vector director

Ahora, son paralelos $\Leftrightarrow f'(\tau) \times \text{Vector director} = 0$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{1+\tau^2} & \frac{1}{(1+\tau)^2} & \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left( \frac{1}{1+\tau^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} - \frac{1}{1+\tau^2}, \frac{1}{1+\tau^2} - \frac{1}{(1+\tau)^2} \right) = 0$$

$\Leftrightarrow$ Directo que $\tau = 0$ cumple la condición.

Ahora, hacemos $f(0) = (0, -1, 0)$ y $f'(0) = (1, 1, 1)$

Como queremos el plano osculador y ya tenemos el punto, nos falta B.

$$f''(\tau) = \left( -\frac{2\tau}{(1+\tau^2)^2}, -\frac{2}{(1+\tau)^3}, -\frac{\tau}{(1+\tau^2)^{3/2}} \right) \Rightarrow f''(0) = (0, -2, 0)$$

$$\Rightarrow B = f'(0) \times f''(0) = (1, 1, 1) \times (0, -2, 0) \Rightarrow B = (2, 0, -2)$$

$\therefore$ Plano osculador $\rightarrow (2, 0, -2) \cdot ((x, y, z) - (0, -1, 0))$

$$\Rightarrow x - z = 0 \; //$$

# P3)

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, e^t)$$

a) Recta tangente

$$r(0) = (1, 0, 1)$$

$$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, e^t) \Rightarrow r'(0) = (0, 1, 1)$$

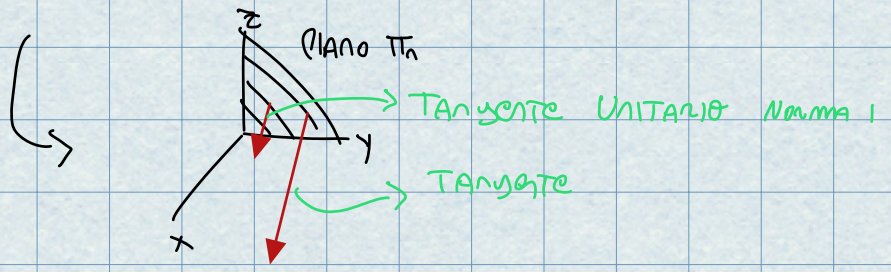
$$\therefore f(t) = (1, 0, 1) + t(0, 1, 1)$$

Plano Normal: $\Pi_n$

→ Ver figura resumen

$\Pi_n$ compuesto por B y N $\Rightarrow T \perp \Pi_n$

Nota: T puede ser unitario o no, da lo misma




$$\therefore \Pi_n : (0, 1, 1) \cdot \big((x, y, z) - (1, 0, 1)\big) = 0 \;//$$

b) Forma general de una recta tangente

Punto a cualquiera $\rightarrow (\cos a, \operatorname{sen} a, e^a)$

Vector director cualquiera $\rightarrow (-\operatorname{Sen}\alpha, \operatorname{Cos}\alpha, e^{\alpha})$

$$f(T) = (\operatorname{Cos}\alpha, \operatorname{Sen}\alpha, e^{\alpha}) + T(-\operatorname{Sen}\alpha, \operatorname{Cos}\alpha, e^{\alpha})$$

$$f(T) = (\operatorname{Cos}\alpha - T\operatorname{Sen}\alpha, \operatorname{Sen}\alpha + T\operatorname{Cos}\alpha, e^{\alpha} + Te^{\alpha})$$

Condición para $\cap$ al plano $XY \rightarrow z = 0$

$\rightarrow$ ¿Qué $T$ hace que mi recta tangente no tenga componente $z$? PD: gracias al compañero que me hizo ver esta forma simple :)

$\hookrightarrow e^{\alpha} + Te^{\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{T = -1}$

Reemplazando

$$f(-1) = (\operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sen}\alpha, \operatorname{Sen}\alpha - \operatorname{Cos}\alpha, 0)$$

Verificamos que la recta "CAC" en la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$

$$\Rightarrow (\operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sen}\alpha)^2 + (\operatorname{Sen}\alpha - \operatorname{Cos}\alpha)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cos}^2\alpha + 2\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sen}\alpha + \operatorname{Sen}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\alpha - 2\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sen}\alpha + \operatorname{Sen}^2\alpha = 2$$

$$\Rightarrow 2(\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Sen}^2\alpha) = 2 \Rightarrow 2 = 2 \text{ //}$$

$\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Sen}^2\alpha = 1$

c) Condición para que la curva ∩ al plano YZ:

$X = 0$

haciendo 0 la componente X de $F(T)$.

$\rightarrow \quad \cos T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \pi/2 \;\; \text{y} \;\; T = \frac{3\pi}{2}$

Formamos las ecuaciones de las rectas tang.

$F(\pi/2) = (0, 1, e^{\pi/2})$ ; $F(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1, e^{\frac{3\pi}{2}})$

$F'(\pi/2) = (-1, 0, e^{\pi/2})$ ; $F'(\frac{3\pi}{2}) = (1, 0, e^{3\pi/2})$

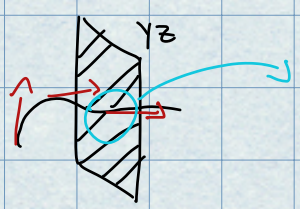
$f_1(T) = (0, 1, e^{\pi/2}) + T(-1, 0, e^{\pi/2})$ ; $f_2(T) = (0, -1, e^{\frac{3\pi}{2}}) + T(1, 0, e^{\frac{3\pi}{2}})$

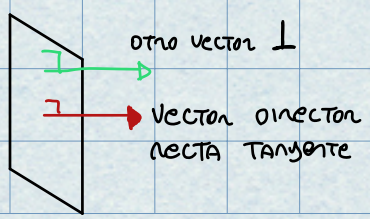
Como queremos ver si la curva es ⊥ al plano YZ, basta con verificar que el vector director de cada recta tangente sea ∥ a un vector ⊥ de YZ.

↳ Paralelo ☺

¿Por qué se usa la recta tangente?

→



La única forma de que la curva sea $\perp$ a $yz$ es que el vector director de la recta tangente en los puntos donde $x=0$ sea $\parallel$ a otro vector del plano.

Por lo tanto, si la curva es $\perp$ a $yz$,

Vec. director $\times$ Vec. normal plano $= 0$.

Comprobando para $\tau = \frac{\pi}{2}$

$$(-1, 0, e^{\pi/2}) \times (1, 0, 0) \overset{?}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & e^{\pi/2} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, e^{\pi/2}, 0) \neq 0$$

$\therefore$ No es $\perp$ en $\tau = \frac{\pi}{2}$.

Comprobando para $\tau = \frac{3\pi}{2}$

$$(1, 0, e^{\frac{3\pi}{2}}) \times (1, 0, 0) \overset{?}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & e^{\frac{3\pi}{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -e^{\frac{3\pi}{2}}, 0) \neq 0$$

∴ No es ⊥ en $T = \frac{3\pi}{2}$

En conclusión, la curva NUNCA es ⊥ al plano YZ.

P4| Fe de erratas: debe ser Sen(2T)

mal tipeo
perdón !!

**Problema 4**

Dada la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = sen(2t) \qquad y(t) = \frac{t}{\pi} \qquad z(t) = cos(2t)$$

$$F(T) = (Sen2T, \frac{T}{\pi}, Cos2T)$$

¿Qué T nos da el $(1, \frac{1}{4}, 0)$?

es directo que $T = \frac{\pi}{4}$

Para el tangente

$$F'(T) = (2Cos2T, \frac{1}{\pi}, -2Sen2T)$$

$$r'(\pi/4) = \left(0, \frac{1}{\pi}, -2\right)$$

$$|r'(\pi/4)| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + 4} = \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{\pi}$$

Tangente unitario: $\dfrac{r'(\pi/4)}{|r'(\pi/4)|} = \dfrac{\left(0, \frac{1}{\pi}, -2\right)}{\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{\pi}}$

$$\rightarrow T(\pi/4) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}, -\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}\right)$$

Normal unitario $\dfrac{T'(t)}{|T'(t)|}$

$$T'(t) = \frac{(-4\operatorname{Sen} 2t, 0, -4\operatorname{Cos} 2t)}{\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{\pi}}$$

$$|T'(t)| = \frac{4\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}$$

$$\therefore N(t) = \frac{1}{4}(-4\operatorname{Sen} 2t, 0, -4\operatorname{Cos} 2t)$$

$$N(\pi/4) = (-1, 0, 0)$$

Binormal en $T = \frac{\pi}{4}$

↳ UNITARIO siempre que se hace el producto cruz con vectores unitarios

$$B(\pi/4) = T(\tfrac{\pi}{4}) \times N(\tfrac{\pi}{4})$$

$$= \left(0, \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}, \frac{-2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}\right) \times (-1, 0, 0)$$

$$= \frac{(0, 2, \frac{1}{\pi})}{\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{\pi}}$$

//

b) Usando el vector tangente:

$$k_T(T) = (1, \tfrac{1}{4}, 0) + T(0, \tfrac{1}{\pi}, -2)$$

Usando el tangente unitario

$$k_T(T) = (1, \tfrac{1}{4}, 0) + \frac{T(0, \frac{1}{\pi}, -2)}{\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{\pi}}$$

☆ Se puede con ambos, da lo mismo :P

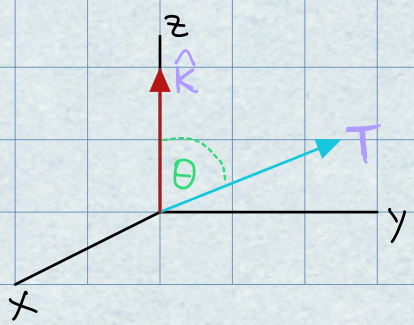
C) Plano Normal → Formado por B y N, ∴ el vector tangente es ⊥ al plano

$$\underbrace{(0, \tfrac{1}{\pi}, -2)}_{\text{TANGENTE}} \cdot \left((x,y,z) - \underbrace{(1, \tfrac{1}{4}, 0)}_{\text{PUNTO}}\right)$$

Plano osculador → Formado por T y N, ∴ el vector binormal es ⊥ al plano.

$$\underbrace{(0, 2, \tfrac{1}{\pi})}_{\text{BINORMAL}} \cdot \left((x,y,z) - \underbrace{(1, \tfrac{1}{4}, 0)}_{\text{PUNTO}}\right)$$

D) Para el ángulo, usamos la definición de producto punto entre el vector tangente y $\hat{k}$, ya que el semieje tiene como dirección el vector $\hat{k}$.



$$\rightarrow \quad T \cdot K = \frac{\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}} \left(0, \frac{1}{\pi}, -2\right) \cdot (0,0,1) = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}} (-2) = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos^{-1}\left(\frac{-2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}\right) = \theta \quad //$$

**P5)** $\quad r(t) = (e^t, 2\sqrt{2}\, e^{\frac{t}{2}}, t)$

Es directo que $\quad r(0) = (1, 2\sqrt{2}, 0)$

Plano Normal definido por B y N

$\Rightarrow$ T es $\perp$ al plano.

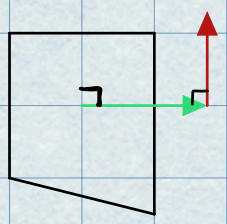
$$r'(t) = (e^t, \sqrt{2}\, e^{\frac{t}{2}}, 1)$$

$$r'(0) = (1, \sqrt{2}, 1)$$

$\therefore$ Ecuación es $\quad (1, \sqrt{2}, 1) \cdot ((x,y,z) - (1, 2\sqrt{2}, 0)) = 0$

$$\Rightarrow (1, \sqrt{2}, 1) \cdot (x-1,\ y-2\sqrt{2},\ z) = 0 \quad //$$

b) Para que $\vec{v}$ sea $\parallel$ al plano, $\vec{v}$ debe ser $\perp$ al vector ortogonal al plano



$$\Rightarrow \vec{v} \cdot (1, \sqrt{2}, 1) = 0$$

$$\Rightarrow (K^3 - K^2, \sqrt{2}K, 3K^2 - K) \cdot (1, \sqrt{2}, 1) = 0$$

$$K^3 - K^2 + 2K + 3K^2 - K = 0$$

$$K^3 + 2K^2 + K = 0$$

$$K(K^2 + 2K + 1) = 0$$

$$K(K+1)^2 = 0$$

~~$K = 0$~~ $\wedge$ $\boxed{K = -1}$

↳ Ya que si hacemos $K=0$ nos queda el vector $\vec{0}$

c) $F'(\tau) = (e^{\tau}, \sqrt{2}e^{\tau/2}, 1)$

$$|F'(\tau)| = \sqrt{e^{2\tau} + 2e^{\tau} + 1} = 9$$

$$= \sqrt{(e^{\tau}+1)^2} = 9$$

$$= |e^{\tau}+1| = 9$$

$$= e^{\tau} + 1 = 9$$

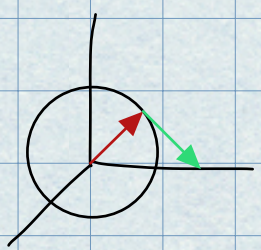
$$= \tau = \ln(8) \quad //$$

**P6** Como piden $K(s) \geq \frac{1}{r}$, es intuitivo tomar la parametrización de la curva en función de $s$.

$$\Gamma(s)$$

Como además $\Gamma(s)$ entrega una curva sobre una esfera, se cumple que

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma'(s) = 0$$



ya que $|\Gamma(s)|$ es constante para todo $s$.

Muy útil → Si $|F(\tau)| = cte \Rightarrow F'(\tau) \perp F(\tau)$

Derivando lo anterior

$$\Gamma''(s)\cdot\Gamma(s) + \Gamma'(s)\cdot\Gamma'(s) = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma''(s)\cdot\Gamma(s) + |\Gamma'(s)|^2 = 0$$

$\Gamma'(s) = T(s)$ (Formulario)

$$\Rightarrow \Gamma''(s)\cdot\Gamma(s) + 1^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma''(s)\cdot\Gamma(s) = -1$$

Aplicamos Norma para poder usar el HINT.

$$\Rightarrow |\Gamma''(s)\cdot\Gamma(s)| = |-1|$$

Usando $|\vec{A}\cdot\vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$

$$\Rightarrow |\Gamma''(s)\cdot\Gamma(s)| \leq |\Gamma''(s)||\Gamma(s)| \leq 1$$

$$\Rightarrow |\Gamma''(s)||\Gamma(s)| \leq 1$$

$|\Gamma(s)| = 1$ (Lo primero que se dijo)

$$\Rightarrow |\Gamma''(s)|\cdot 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow |\underbrace{\Gamma''(s)}| \leq \frac{1}{r}$$

$\Gamma'''(s) = T'(s) = K(s)N(s)$ (Formulario)

$$\Rightarrow |K(s)\,N(s)| \leq \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow |K(s)|\,\underbrace{|N(s)|} \leq \frac{1}{r}$$

Norma de un unitario $|N(s)| = 1$ (Por def. de unitario)

$$\Rightarrow K(s) \leq \frac{1}{r}$$

■

Usando el hint: $|\vec{A}\cdot\vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$

$$|K(s)N(s)\cdot\Gamma(s)| \leq |K(s)N(s)||\Gamma(s)| = 1$$

Donde $|\Gamma(s)| = t$ por lo dicho antes en ☆

$$\Rightarrow |K(s)N(s)\cdot\Gamma(s)| \leq |K(s)N(s)| = \frac{1}{t}$$