PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
TEMPORADA DE VERANO 2016

MAT1630 ⋆ CALCULO III
INTERROGACIÓN 2

1. Calcule el volumen de la región encerrada por

$$z = 2 - x^2 - 4y^2, \quad z = 1.$$

2. Sea D la región acotada por las rectas

$$y - x = -2, \quad y + x = 2, \quad y - x = 1, \quad y + x = 0.$$

Calcule

$$\int\int_D (y^2 - x^2)\, dxdy.$$

3. Calcule el valor máximo y mínimo del producto tres números reales x, y, z, si la suma de estos es cero y la suma de sus cuadrados es uno.

4. *a*) Considere la superficie S, definida implícitamente por:

$$z^2y^3 + x^2y^5 + xz = 0.$$

Verifique que S es el gráfico de una función en las cercanías del punto $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

b) Considere

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow \left(x^3 + y^3 + x, y^3 + y + z^7, \frac{z^3}{3} + z \right) \end{aligned}$$

Verifique que la función inversa $F^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ existe.

Una solución

1. Primero notamos que calcular el volumen pedido es equivalente a calcular el volumen encerrado por $z = 1 - x^2 - 4y^2, \quad z = 0$, y esto ltimo se hace a travs de la integral doble

$$\int\int_D 1 - x^2 - 4y^2 \, dx \, dy,$$

donde D es la elipse $x^2 - 4y^2 = 1$.
Podemos realizar el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta); \\ y &= \tfrac{r}{2}\operatorname{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Este cambio tiene por Jacobiano

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\theta) \\ \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2} & \frac{r\cos(\theta)}{2} \end{vmatrix} = \frac{r\cos^2(\theta)}{2} + \frac{r\operatorname{sen}^2(\theta)}{2} = \frac{r}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int\int_D 1 - x^2 - 4y^2 \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\cos^2(\theta) - 4\frac{r^2\operatorname{sen}^2(\theta)}{4}\right)\frac{r}{2}\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\right)\frac{r}{2}\, dr\, d\theta = \pi\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

2. Primero, es fácil notar que la región D es un paralelogramo, esto por que la recta $y - x = -2$ es paralela con $y - x = 1$ y $y + x = 2$ es paralela con $y + x = 0$.
Consideremos en cambio de variables

$$\begin{aligned} u &= y - x; \\ v &= y + x, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La integral que debemos calcular es entonces

$$\int\int_D (y^2 - x^2)\, dxdy = \int\int_{S(D)} uv|S^{-1}|dudv$$

Es fcil ver que el mdulo del Jacobiano $|S^{-1}| = 1/2$. Veamos ahora cual es la accin de S sobre las rectas que definen D.
Para $y - x = -2$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2(x-1) \end{pmatrix}.$$

Para $y - x = 1$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x+1 \end{pmatrix}.$$

Para $y + x = 0$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $y + x = 2$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-x) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras rectas que se obtienen son verticales y las dos segundas son horizontales, y por tanto $S(D)$ es un rectangulo . Tendremos entonces que

$$\int\int_D (y^2 - x^2)\, dxdy = \int\int_{S(D)} uv|S^{-1}|dudv = \int_0^2 \int_{-2}^1 \frac{uv}{2} dudv = \frac{u^2}{4}\Big|_{-2}^1 \frac{v^2}{4}\Big|_0^2 = -\frac{3}{4}$$

3. Consideremos la función $f(x, y, z) = xyz$ y sean $g(x, y, z) = x + y + z$, $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Con estas funciones el problema se reduce a determinar los valores máximos y mínimos de f sujetos a las restricciones

$$g(x, y, z) = 0, \qquad h(x, y, z) = 1.$$

Utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, con lo cual debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z), \\ g(x, y, z) &= 0, \\ h(x, y, z) &= 1. \end{aligned}$$

O equivalentemente

$$\begin{aligned} yz &= \lambda + 2\mu x, \\ xz &= \lambda + 2\mu y, \\ xy &= \lambda + 2\mu z, \\ x + y + z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Eliminando la variable λ de las tres primeras ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} yz - 2\mu x &= xz - 2\mu y, \\ xz - 2\mu y &= xy - 2\mu z, \\ x + y + z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Y agrupando en las dos primeras ecuaciones,

$$\begin{aligned} z(y - x) &= 2\mu(x - y), \\ x(z - y) &= 2\mu(y - z), \\ x + y + z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Analizamos en primer lugar el caso, $y - x = 0$. En este caso tenemos, despues de reemplazar en las otras dos ecuaciones, que

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Por analogía el caso $z - y = 0$ entrega por soluciones

$$x = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Finalmente los casos en que $y - x \neq 0$ o bien $z - y \neq 0$ conducen o bien a una de las soluciones ya encontradas o:

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

En conclusión, hemos obtenidos seis puntos candidatos a máximo o mínimo para la función $f(x, y, z) = xyz$. De evaluar en ella y comparara cada uno de los puntos obtenidos se concluye que

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}},\right) = f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}},\right) = \frac{2}{6\sqrt{6}}$$

es el valor máximo de f.

Análogamente

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}},\right) = f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}},\right) = -\frac{2}{6\sqrt{6}}$$

es el valor mínimo de f.

4. a. Consideremos la función $F(x, y, z) = z^2y^3 + x^2y^5 + xz$. Si $F(x, y, z) = 0$ es el gráfico de una función de clase $\mathcal{C}^1$ en las cercanías del punto $P = (0, 0, 1)$, el T.F.I. nos asegura que una condición necesaria para ello es que, alguna de las siguientes sea distinta de cero,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P), \quad \frac{\partial F}{\partial x}(P), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P).$$

Calculamos cada una de ellas,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2zy^3 + x$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2xy^5 + z$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 3z^2y^2 + 5x^2y^4$$

y evaluamos en el punto pedido,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(P) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0.$$

Por lo tanto la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a $x = x(y, z)$ y por lo tanto la superficie S es el gráfico de una función del tipo $x = f(y, z)$ en las cercanías del punto $(0, 0, 1)$.

b. Para que F^{-1} exista en las cercanías de cada punto debe verificarse, por el Teorema de la Función Inversa, que $det(JF)(x, y, z) \neq 0$ en las cercanías de cada punto. En este caso tenemos:

$$JF = \begin{pmatrix} 3x^+1 & 3y^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 + 1 & 7z^6 \\ 0 & 0 & z^2 + 1 \end{pmatrix},$$

de donde $det(JF)(x, y, z) = (3x^2 + 1)(3y^2 + 1)(z^2 + 1)$ expresión que claramente en distinta de cero para todo (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$.