PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
18 de Mayo del 2022

MAT1630 - CÁLCULO III

INTERROGACIÓN 2

P1.- Sean $a, b, r > 0$ tales que $a > 2r$. Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ la curva dada por la parametrización $\alpha(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))$, con $t \in [0, \pi/2]$.

Definimos

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Gamma \text{ y } 0 \leq z \leq \frac{b}{a}(a - x - y) \right\}.$$

Calcule el área de R.
(**Indicación:** recuerde la relación entre un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ definido sobre una curva, y el área de la región definida entre la curva y su imagen por la función).

Solución:

Observar que

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Gamma \text{ y } 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

donde $f(x, y) = \frac{b}{a}(a - x - y)$.

El área de R entonces está dada por la integral

$$\int_\Gamma f ds = \int_0^{\pi/2} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt = \int_0^{\pi/2} \frac{b}{a}(a - r\cos(t) - r\,\mathrm{sen}(t))r dt$$

Resolviendo la integral se obtiene que el área de R es

$$br\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2r}{a}\right).$$

P2.- Sean $a > 0$ y $b > 0$. Calcular la integral de linea

$$I_\Gamma = \int_\Gamma y^2 dx + x^2 dy$$

en los casos siguientes:

(i) Γ es el arco (en el primer cuadrante) de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

uniendo los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

(ii) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ donde Γ_1 es el segmento recto uniendo $(a, 0)$ a (a, b) y Γ_2 es el segmento recto uniendo (a, b) a $(0, b)$.

Solución:

Caso (i). Parametrizamos la curva como sigue: $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$. Por definición,

$$\begin{aligned} I_\Gamma &= \int_0^{\pi/2} y^2(t)x'(t) + x^2(t)y'(t)\,dt \\ &= -ab^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t\,dt + a^2 b \int_0^{\pi/2} \cos^3 t\,dt \\ &= -\frac{ab^2}{4} \int_0^{\pi/2} (3\sin t - \mathrm{sen}\,3t)\,dt + \frac{a^2 b}{4} \int_0^{\pi/2} (\cos 3t + 3\cos t)\,dt \\ &= -\frac{8ab^2}{12} + \frac{8a^2 b}{12} = \frac{2ab}{3}(a - b). \end{aligned}$$

Caso (ii). Parametrizamos el segmento Γ_1 por: $x(t) = a$, $y(t) = bt$, $t \in [0,1]$ y el segmento Γ_2 por: $x(\theta) = a(1-\theta)$, $y(\theta) = b$, $\theta \in [0,1]$. Por definición,

$$\begin{aligned} I_\Gamma &= I_{\Gamma_1} + I_{\Gamma_2} \\ &= \int_0^1 y^2(t)x'(t) + x^2(t)y'(t)\,dt + \int_0^1 y^2(\theta)x'(\theta) + x^2(\theta)y'(\theta)\,d\theta \\ &= a^2 b \int_0^1 dt - ab^2 \int_0^1 d\theta = ab(a-b). \end{aligned}$$

P3.- Considere el campo vectorial

$$F(x,y) = \langle y^3 + ny^2 + (m+2)xy, 3xy^2 - nx^2 + (m-2)xy \rangle.$$

(a) Encuentre n, m tal que $\int_C F \cdot \mathrm{dr} = 0$ para toda curva cerrada suave C.

(b) Para los valores n, m encontrados en (a), evaluar $\int_C F \cdot \mathrm{dr}$ donde C es el camino poligonal que va de $(0,0)$ a $(1,0)$, luego de $(1,0)$ a $(0,2)$, y finalmente de $(0,2)$ a $(3,3)$.

Solución:

(a): La idea es encontrar n, m tal que F sea conservativo. Tomando las derivadas cruzadas, necesitamos

$$3y^2 + 2ny + (m+2)x = 3y^2 - 2nx + (m-2)y,$$

y así $2n = m - 2$ y $m + 2 = -2n$. Con lo cual $n = -1$ y $m = 0$.

(b): Con (a) sabemos que el trabajo entre dos puntos es independiente del camino, y así encontramos potencial $f(x,y) = xy^3 - xy^2 + x^2 y + C$. Luego el trabajo pedido es $f(3,3) - f(0,0) = 3^4$ por el TFC. También se puede hacer correctamente parametrizando 3 curvas y realizando el cálculo explícito de las integrales, aunque es un tanto más largo.

P4.- Considere el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x,y) = (e^{x^2} x, x + y^4 \tan(y)).$$

a) Suponga que $\gamma : [a,b) \to \mathbb{R}^2$ es una curva simple, cerrada y orientada positivamente. Muestre que $\int_\gamma F \cdot \mathrm{dr}$ es igual al área encerrada por γ

b) Suponga que $\gamma : [a,b) \to \mathbb{R}^2$ es una curva simple, cerrada y orientada positivamente. Muestre que

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{dr} = -\int_\gamma y\,dx.$$

c) Si C es la mitad superior de la circunferencia de radio 1 orientada positivamente calcule $\int_C F \cdot \mathrm{dr}$. (**Indicación:** Observe que C no es una curva cerrada, pero $C \cup L$, donde L es el segmento del eje x que une ambos extremos de la circunferencia, si es una curva cerrada.)

Solución:

a) Por teorema de Green tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\gamma F \cdot \mathrm{dr} &= \int\int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + y^4 \tan(y)) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2} \cos x) \right) dxdy \\ &= \int\int_D 1 dxdy = \mathrm{Area}(D). \end{aligned}$$

Donde D es la region encerrad por γ.

b) Por teorema de Green tenemos que

$$-\int_{\gamma} y\,dx = \text{Area}(D).$$

Por la parte anterior concluimos el resultado

c) Consideremos $\gamma = C \cup L$

Por la primera parte

$$\text{Area}(D) = \int_{\gamma} F \cdot \text{dr} = \int_{C} F \cdot \text{dr} + \int_{L} F \cdot \text{dr}.$$

Sabemos que $\text{Area}(D) = \frac{\pi}{2}$. Por otro lado

$$\int_{L} F \cdot \text{dr} = \int_{-1}^{1} (xe^{x^2}, x) \cdot (1, 0)dx = \int_{-1}^{1} xe^{x^2} dx = 0.$$

Concluimos que

$$\int_{C} F \cdot \text{dr} = \frac{\pi}{2}.$$