Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Segundo semestre de 2015

Examen
MAT1630 * Cálculo 3.

1. (**1 punto**) Sea C la curva formada por los puntos (x, y, z) tales que:

$$x^2y^2 + 2x + z^3 = 16 \qquad \text{y} \qquad 3x^2 + y^2 - 2z = 9\,.$$

Sea R la recta tangente a C en el punto $P = (2, 1, 2)$. Determine el punto de intersección de R con el plano $x = 0$ (En caso de existir).

Solución. Sean $S_1 : x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$ y $S_2 : 3x^2 + y^2 - 2z = 9$. Entonces S_1 y S_2 son superficies de nivel de las funciones G_1 y G_2 definidas por

$$G_1(x, y, z) = x^2y^2 + 2x + z^3 - 16 \quad \text{y} \quad G_2(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 2z - 9$$

respectivamente. Los planos tangentes a S_1 y S_2 tienen vectores normales $\vec{n_{S_1}} = \nabla G_1(2, 1, 2) = (6, 8, 12)$ y $\vec{n_{S_2}} = \nabla G_2(2, 1, 2) = (12, 2, -2)$ respectivamente. Por lo tanto, los planos tangentes a S_1 y S_2 en el punto $(2, 1, 2)$ están dados por

$$\pi_1 : 3x + 4y + 6z = 22 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : 6x + y - z = 11$$

respectivamente. La intersección de los planos antes obtenidos corresponde a la recta R tangente a C en el punto $P = (2, 1, 2)$. Por lo tanto, el punto de intersección de R con el plano $x = 0$ se obtiene resolviendo el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x + 4y + 6z &=& 22 \\ 6x + y - z &=& 11 \\ x &=& 0 \end{array}\right\},$$

cuyas soluciones son $x = 0$, $y = 44/5$ y $z = -11/5$.
□

2. (**1 punto**) Sea f una función diferenciable en las variables x, y. Definimos $g(r, \theta) = f(x, y)$ donde (x, y) es el punto cuyas coordenadas polares son (r, θ). Suponga que el gradiente de f en el punto $(2, 0)$ es $(-3, 1)$. Calcule el valor de

$$g_r(2, 0)^2 + g_\theta(2, 0)^2.$$

Solución. La función $g(r, \theta)$ está dada por $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Usando la regla de la cadena obtenemos que

$$g_r(r,\theta) = f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta$$

y

$$g_\theta(r,\theta) = -r f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta + r f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta.$$

Reemplazando en el punto $(2,0)$ entonces tenemos que $g_r(2,0) = -3$ y $g_\theta(2,0) = 2$. Por lo tanto,

$$g_r(2,0)^2 + g_\theta(2,0)^2 = 13.$$

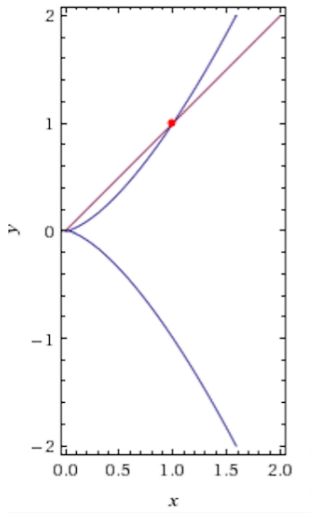
□

3. (**1 punto**) El *centroide* de una región R del plano xy es definido como el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ tal que:

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{Área de } R}\iint_R x\, dA\,, \qquad \bar{y} = \frac{1}{\text{Área de } R}\iint_R y\, dA\,.$$

Sea R la región en el primer cuadrante limitada por la recta $y = x$ y la curva $y^2 = x^3$. Calcule el área y el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de R.

Solución. La región R se muestra en la figura a continuación: Los puntos de intersección



de las curvas $y = x$ y $y^2 = x^3$ son $(0,0)$ y $(1,1)$.

Usando el teorema de Fubini tenemos que

$$\text{Área}(R) = \iint_R 1\, dA = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} 1\, dydx = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} 1\, dxdy = \frac{1}{10},$$

$$\iint_R x\, dA = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} x\, dydx = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} x\, dxdy = \frac{1}{21}$$

y

$$\iint_R y\,dA = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} y\,dydx = \int_0^1 \int_{y}^{y^{2/3}} y\,dxdy = \frac{1}{24}.$$

Por lo tanto, $\bar{x} = 10/21$ y $\bar{y} = 5/12$.

□

4. (**1 punto**) Sea R la región formada por puntos (x, y, z) tales que

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 5 \qquad \text{y} \qquad 4 \leq z \leq 6\,,$$

Sea S la frontera de R, orientada según el vector normal $\vec{n}$ apuntando hacia el exterior de la región. Calcule el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{xz}{1+x^2y^2z^2} + x, y + \frac{1}{z} - \frac{yz}{1+x^2y^2z^2} + 1, z + y - \frac{1}{y} + 2\right)$$

a través de S.

Solución. Usando el teorema de la divergencia de Gauss tenemos que

$$\int_S \vec{F} = \iiint_R div(\vec{F})\,dV.$$

Un cálculo muestra que $div(\vec{F}) = 3$. Por lo tanto,

$$\int_S \vec{F} = \iiint_R div(\vec{F})\,dV = \iiint_R 3\,dV = 3 \cdot Vol(R),$$

donde $Vol(R)$ denota el volumen de la región R. Como el volumen de un cilindro es $\pi r^2 h$ (r: radio basal, h: altura), entonces tenemos que $Vol(R) = 10\pi$. Por lo tanto,

$$\int_S \vec{F} = \iiint_R div(\vec{F})\,dV = \iiint_R 3\,dV = 3 \cdot Vol(R) = 30\pi.$$

□

5. (**2 puntos**) Sea S la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y arriba del plano xy, orientada con $\vec{n}$ hacia arriba. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (xy, xz, xz)$. Compruebe que el Teorema de Stokes es válido para $\vec{F}$ y S.

Solución. Debemos comprobar que la siguiente identidad es válida:

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_S rot(\vec{F}),$$

donde $\int_\gamma \vec{F}$ es la integral de línea del campo vectorial F a lo largo de la curva γ (γ: frontera de la superficie S) y $\int_S rot(\vec{F})$ es la integral de superficie del campo vectorial $rot(\vec{F})$ a través de la superficie S. Por un lado, un cálculo muestra que

$$rot(\vec{F}) = (-x, -z, z - x).$$

La superficie del paraboloide se parametriza según la función $\varphi(u,v) = (u, v, 1-u^2-v^2)$, para $(u,v) \in \{(u,v)/\, u^2+v^2 < 1\}$. Un cálculo muestra que $\vec{N} = (2u, 2v, 1)$ es el vector normal de la superficie en el punto $\varphi(u,v)$ apuntando hacia el exterior de la superficie. Luego, usando coordenadas polares tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_S rot(\vec{F}) &= \iint_{u^2+v^2<1} rot(\vec{F})(\varphi(u,v)) \cdot \vec{N}\ d(u,v) \\
&= \iint_{u^2+v^2<1} rot(\vec{F})(u, v, 1-u^2-v^2) \cdot (2u, 2v, 1)\ d(u,v) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \{rot(\vec{F})(r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r^2) \cdot (2r\cos\theta, 2r\sin\theta, 1)\} r\, d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \{(-r\cos\theta, r^2-1, 1-r^2-r\cos\theta) \cdot (2r\cos\theta, 2r\sin\theta, 1)\} r\, d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \{(-2r^2\cos^2\theta + 2r(r^2-1)\sin\theta + 1 - r^2 - r\cos\theta) r\, d\theta dr.
\end{aligned}$$

Dado que

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_S rot(\vec{F}) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \{(-2r^2\cos^2\theta + 1 - r^2) r\, d\theta dr \\
&= -2\left(\int_0^1 r^3 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta\right) + 2\pi \int_0^1 (1-r^2) r dr \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La curva frontera de la superficie es $\gamma : x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Dado que la normal de la superficie apunta hacia el exterior, entonces la curva debe estar parametrizada según la función $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \vec{F} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t, 0, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t \ dt = 0.
\end{aligned}$$

De esta manera, se verifica el teorema de Stokes. $\square$