PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE 2015

INTERROGACIÓN 1
MAT1630 ⋆ CÁLCULO 3

1. Considere las siguientes funciones:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Muestre que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, las derivadas parciales ,$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ existen y expréselas en términos de x, y.

   b) Analice la diferenciabilidad y la continuidad de g en $(0,0)$.

2. *a*) Demuestre que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ en el punto $(5,-12,169)$ Corta al plano XY según la recta de ecuaciones

$$10x - 24y - 169 = 0; \quad z = 0.$$

   b) Suponga que la función $T(x,y,z) = x^2+2y^2+2z^2$ entrega la temperatura en cada punto del espacio. En el punto $(1,1,1)$ ¿cuál es la dirección en la cual se produce el mayor descenso de la temperatura?.

3. *a)* Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables que satisfacen

$$f\left(\frac{x}{y}, \frac{g(x,y)}{x}\right) = 0, \qquad \text{para cada} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Suponga que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$. Demuestre que,

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = g(x,y).$$

b) Determine valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales $w(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^p$ satisface

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0.$$

4. Determine el máximo y el mínimo valor que alcanza la expresión

$$z = x^2 - 4xy - y^2 + 2y,$$

para

$$x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad x + y \leq 2.$$

Tiempo: 120 minutos.
Sin consultas, ni Calculadoras.

Una solución

1. Considere las siguientes funciones:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Muestre que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, las derivadas parciales ,$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ existen y expréselas en términos de x, y.

b) Analice la diferenciabilidad y la continuidad de g en $(0,0)$.

Solución. Parte (a):

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Si $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^4) - 2x^3y^2}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y(x^2+y^4) - 4y^5x^2}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2x^4y - 2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}.$$

Parte (b): Para analizar la continuidad basta demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. Si $x = 0$ o $y = 0$ tenemos $g(x,y) = 0$, por lo tanto, podemos asumir que $x \neq 0, y \neq 0$.

$$|g(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{x^2y^2}{x^2} \leq y^2 \leq x^2 + y^2.$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \sqrt{\epsilon}$ para tener

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta \to |g(x,y) - 0| \leq \epsilon,$$

por lo tanto g es continua en $(0,0)$. Para ver si g es diferenciable en $(0,0)$, como ya sabemos que las derivadas parciales existen (y son ambas 0), consideramos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|g(0,0)-g(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pasando a coordenadas polares $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, vemos que la expresion de arriba es igual a

$$r \cdot \frac{\cos\theta^2 \sin\theta^2}{\cos\theta^2 + r^2 \sin\theta^4}.$$

Luego notando que, por ejemplo,

$$\left| \frac{r\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + r^2\,\mathrm{sen}^4(\theta)} \right| \leq r \cdot sen^2(\theta)$$

Tenemos que el límite buscado es igual a cero y por lo tanto f es diferenciable en $(0,0)$.

2. *a*) Demuestre que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ en el punto $(5,-12,169)$ Corta al plano XY según la recta de ecuaciones

$$10x - 24y - 169 = 0; \quad z = 0.$$

b) Suponga que la función $T(x,y,z) = x^2+2y^2+2z^2$ entrega la temperatura en cada punto del espacio. En el punto $(1,1,1)$ ¿cuál es la dirección en la cual se produce el mayor descenso de la temperatura?.

Solución:

a) La ecuación del plano tangente será de la forma

$$z - 169 = z_x(5,-12)(x-5) + z_y(5,-12)(y+12).$$

O equivalentemente

$$10x - 24y - z - 169 = 0.$$

Haciendo $z = 0$ obtenemos la recta pedida.

b) Dado que la función es creciente, la dirección de mayor descenso estaŕa dada por

$$-\frac{\nabla T}{\|\nabla T\|}(1,1,1)$$

En este caso $\nabla T = (2x, 4y, 4z)$, evaluando en $(1,1,1)$ tenemos que la dirección pedida es

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

3. *a)* Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables que satisfacen

$$f\left(\frac{x}{y}, \frac{g(x,y)}{x}\right) = 0, \qquad \text{para cada} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Suponga que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$. Demuestre que,

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = g(x,y).$$

b) Determine valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales $w(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^p$ satisface

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0.$$

Solución:

a) Consideremos $f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{g(x,y)}{x}\right) = f(u,v)$. Con lo cual, derivando respecto de x, e y, tenemos:

$$f_u \cdot \frac{1}{y} + f_v \cdot \left(\frac{xg_x - g}{x^2}\right) = 0$$
$$f_u \cdot \frac{-x}{y^2} + f_v \left(\frac{g_y}{x}\right) = 0.$$

De la segunda ecuación $f_u = f_v \left(\dfrac{y^2 g_y}{x^2}\right)$. Reemplazando en la primera ecuación,

$$f_v \left[\frac{yg_y}{x^2} - \frac{xg_x - g}{x^2}\right] = 0,$$

y como por hipótesis tenemos que $f_v \neq 0$ (la derivada respecto de la segunda variable es distinta de cero) se tiene,

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = g(x,y).$$

b) Calculemos en primer lugar w_x.

$$w_x = p(x^2 + y^2 + z^2)^{p-1} \cdot 2x.$$

A continuación

$$w_{xx} = p(p-1)(x^2 + y^2 + z^2)^{p-2}4x^2 + 2p(x^2 + y^2 + z^2)^{p-1}.$$

O equivalentemente

$$w_{xx} = 2p(x^2 + y^2 + z^2)^{p-2}(2px^2 - x^2 + y^2 + z^2).$$

Por simetria se tiene que

$$w_{yy} = 2p(x^2 + y^2 + z^2)^{p-2}(2py^2 + x^2 + y^2 + z^2).$$

$$w_{zz} = 2p(x^2 + y^2 + z^2)^{p-2}(2pz^2 + x^2 + y^2 - z^2).$$

De donde

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 2p(x^2 + y^2 + z^2)^{p-2}[p(2x^2 + 2y^2 + 2z^2) + x^2 + y^2 + z^2].$$

Luego para $p = \dfrac{-1}{2}$ y $p = 0$ se cumple lo pedido.

4. En primer lugar buscamos los puntos críticos de nuestra función en el interior de la región. Para ello resolvemos

$$z_x = 2x - 4y = 0$$
$$z_y = -4x - 2y + 2 = 0.$$

La solución es el punto $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$. Notemos que $\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5} < 2$ luego el punto encontrado se encuentra en el interior de la región dada y además

$$z\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}.$$

A continuación analizamos la función sobre la frontera de la región dada.

- Para $y = 0, 0 \leq x \leq 2$ se tiene que

$$z = x^2$$

  Luego $(0,0)$ y $(2,0)$ son los puntos críticos en los cuales $z(0,0) = 0; \quad z(2,0) = 4.$

- Para $x = 0, 0 \leq y \leq 2$ se tiene que

$$z = -y^2 + 2y.$$

  Para la cual encontramos $(0,0); (0,1); (0,2)$ como puntos críticos en los cuales

$$z(0,0) = 0, \quad z(0,1) = 1, \quad z(0,2) = 0.$$

- Finalmente para $x + y = 2; x \geq 0; y \geq 0$ se tiene que

$$z = (2-x)^2 - 4(2-x)x - x^2 + 2x = 4 - 10x + 4x^2, \qquad x \in [0,2].$$

  Para la cual encontramos como puntos criticos a: $(0,2), \quad (2,0), \quad (3/4, 5/4)$ en los cuales,

$$z(0,2) = 1, \quad z(2,0) = 4, \quad z(3/4, 5/4) = -\frac{9}{4}.$$

Del analisis anterior podemos concluir que

$$z(3/4, 5/4) = -\frac{9}{4}, \quad \text{es el valor mínimo.}$$

$$z(2,0) = 4, \quad \text{es el valor máximo.}$$