Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas

MAT1630 - Cálculo III - TAV2014

Interrogación 3

1. Calcule la integral doble

$$\iint_R (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dxdy$$

siendo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0,\ y > 0,\ a \leq xy \leq b,\ 0 \leq y - x,\ y^2 - x^2 \leq 1\}$ con $0 < a < b$. **[6 Puntos.]**

Solución: Graficando las curvas que intervienen en la definición de R y que forman su frontera observamos que es conveniente hacer el siguiente cambio de variables

$$u = xy, \quad v = y^2 - x^2.$$

Es claro que la u variará entre a y b. La v varía entre 0 y 1, ya que $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$. El conjunto R' transformado del R es, pues,

$$R' = \{(u, v)/a \leq u \leq v,\ 0 \leq v \leq 1\}.$$

El jacobiano de esta transformación es $J\left(\dfrac{u, v}{x, y}\right) = 2(x^2 + y^2)$.
Así resulta

$$\iint_R (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dx\,dy = \frac{1}{2}\int_a^b \int_0^1 v^u dv\,du = \frac{1}{2}\log\frac{b+1}{a+1}.$$

2. Determine el Volumen que está arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ **[6 Puntos.]**

Solución: Usaremos coordenadas esféricas. Éstas son

$$x = r\cos\theta\ \text{sen}\,\phi,\ \ y = r\text{sen}\,\theta\ \text{sen}\,\phi,\ \ z = r\cos\phi$$

con

$$0 \leq r,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \ 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Usando este sistema de coordenadas, la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es $r^2 = 1$, y la ecuación del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sería

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ r^2\cos^2 2\theta\text{sen}^{\,2}\phi + r^2\text{sen}^{\,2}\theta\text{sen}^{\,2}\phi &= r^2\cos^2\phi \\ \text{sen}^{\,2}\phi &= \cos^2\phi \\ \tan^2\phi &= 1 \end{aligned}$$

Entonces $\tan\phi = 1$ o $\tan\phi = -1$. Si $\tan\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$. Si $\tan\phi = -1 \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}$. Este último valor lo descartamos porque estamos considerando sólo la parte superior de la esfera y del cono.

Por lo tanto, el sólido al que le calcularemos el volumen en coordenadas esféricas es

$$\Omega' = \{(r,\theta,\phi)/0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi/4\}.$$

Por lo tanto, el volumen V buscado es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^2\,\text{sen}\,\phi\,dr\ d\phi\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \text{sen}\,\phi\,d\phi \int_0^1 r^2\,dr \\ &= (2\pi)(-\cos\phi]_0^{\pi/4})(\frac{r^3}{3}\Big]_0^1) \\ &= \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

3. Utilizar el lema de Green para calcular

$$\oint_{\mathcal{C}} (2y + \sqrt{9 + x^2})\ dx + (5x + e^{\arctan y})\ dy,$$

siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. **[6 Puntos.]**

Solución: Usando el lema de Green, tenemos que

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} (2y + \sqrt{9 + x^2})\ dx + (5x + e^{\arctan y})\ dy &= \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(5x + e^{\arctan y}) - \frac{\partial}{\partial y}(2y + \sqrt{9 + x^2}) \right) dA \\
&= \iint_R (5 - 2) dA \\
&= 3 \iint_R dA
\end{aligned}$$

donde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Entonces usando coordenadas polares, tenemos que la región transformada de R es $R' = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
3 \iint_R dA &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^a r\, dr\, d\theta \\
&= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\, dr \\
&= 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big]_0^a \\
&= 3\pi a^2
\end{aligned}$$

4. Calcular el área de la porción de superficie $\mathfrak{S}$ definida mediante

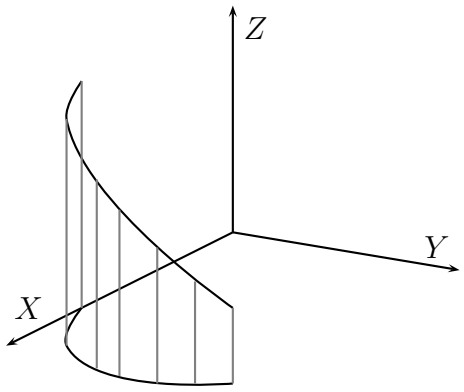
$$\vec{r}(u,v) = (\cos u + u \text{ sen } u,\ \text{sen } u - u\cos u,\ v\sqrt{3-u^2}),$$

cuando $u \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y $v \in [0,1]$. **[6 Puntos.]**

Solución: En este caso es claro que tenemos una porción de superficie reglada comprendida entre las curvas

$\vec{s}_1 = (\cos u + u \,\text{sen}\, u - u\ \cos u, 0), \quad \vec{s}_2 = (\cos u + u \,\text{sen}\, u, \text{sen}\, u - u\ \cos u, \sqrt{3-u^2})$

cuando $u \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y que vemos en la figura.



En esta situación tendremos

$$\vec{e}_1 = \vec{r}_u = \left(u\ \cos u, u\,\text{sen}\, u, -\frac{uv}{\sqrt{3-u^2}}\right),$$

$$\vec{e}_2 = \vec{r}_v = (0,0,\sqrt{3-u^2}),$$

con lo que $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = (\sqrt{3-u^2}u\,\text{sen}\, u, -\sqrt{3-u^2}u\ \cos u, 0)$, de donde

$$d\sigma = u\sqrt{3-u^2}du\,dv,$$

y por lo tanto el área pedida es

$$\sigma = \int_0^1 dv \int_0^{\pi/2} u\sqrt{3-u^2}du = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{3-u^2}d(3-u^2) =$$

$$\frac{1}{3}\left(3^{3/2} - \left(3 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{3/2}\right).$$