PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Temporada Académica de Verano 2023

CÁLCULO III - MAT1630
EJERCICIOS CAPÍTULO 3

Clase 12: Superficies parametrizadas

1. Considere la superficie S obtenida al rotar la curva $c(t) = (t^2 + 1, t^3)$, $t \in [0, 3]$, en torno al eje vertical (el eje-y).

   (a) Dé una parametrización de S.

   (b) Encuentre el/los puntos donde el plano tangente a S es paralelo al plano $3x + 3y + 2\sqrt{2}z = 0$.

2. Llamemos S_1 a la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que queda dentro del cono $z = \alpha\sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha > 0$, y S_2 la porción del mismo cono que queda dentreo de la esfera dada. Determinar el valor de α de modo que el área de las superficies sean iguales.

3. Considere la superficie Σ parametrizada por $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ según la ecuación

$$r(u, v) = (u, 1 + u^2 + v^2, v)\,.$$

   (a) Encuentre la ecuación del plano tangente a Σ en el punto $r(u, v)$.

   (b) Sea $\Gamma \subset \Sigma$ los puntos de la superficie Σ cuyos planos tangentes pasan por el origen. Encuentre una parametrización de la curva Γ.

4. Calcule el área de la superficie K que se genera al rotar la gráfica de $f(x) = 1 - x^2$ entre $0 \leqslant x \leqslant 1$ en torno al eje OY.

5. Considere la superficie S obtenida al girar una vuelta completa en torno al eje OX la curva γ parametrizada en coordenadas polares por: $(\theta, r)\ :\ r = 1+\theta$ con $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

   (a) Parametrice la superficie S.

   (b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $Q = (0, 0, 1 + \pi/2)$.

6. Considere la superficie en $\mathbb{R}^3$: $S = \{(x, y, z)\ :\ z = x^2 + y^2, 1 < z < 9\,, y > 0\}$.

(a) Determine la ecuación del plano tangente a S en $(1, 1, 2)$.

(b) Calcule el área de S.

7. Considere la superficie S con parametrización

$$\mathbf{r}(t, s) = (2(\cos(t) + 3)\cos(s), 2\sin(t), 2(\cos(t) + 3)\sin(s)) ,$$

para $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Calcule el área superficial de S.

8. La superficie S está dada por la parte positiva de la función $f(t) = \sqrt{-t^2 + 3t - 2}$ girando alrededor del eje y.

(a) Determine las ecuaciones paramétricas de S.

(b) Calcule el área de S.

Clase 13: Integrales de Superficies

1. Calcule $\iint_S (x^2+y^2)dS$ donde S es la superficie del cono $z^2 = 3(x^2+y^2)$ entre $z = 0$ y $z = 3$.

2. Calcule el flujo del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie $|x|+|y|+|z| = 1$.

3. Calcule la integral de superficie $\iint_S (x + z)\, dS$ donde S es la porción del primer octante del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

4. Calcule el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie

$$S \,:\, x + y + z = 1 \,, \quad x \geqslant 0 \,, y \geqslant 0 \,, z \geqslant 0$$

con sus normales apuntando hacia el "exterior" (tercera coordenada positiva).

5. Calcular el flujo de salida del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2y, zy, 3z)$ a través de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ acotada en el primer octante por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 5$.

Clases 14: Teorema de Stoke

1. Sea S la superficie definida por $z = 5 - x^2 - y^2$ con $z \geqslant 1$, orientada con el vector normal unitario apuntando hacia abajo. Considere el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (e^z + 1, y, y\cos(x^2)) .$$

   Calcule $\iint\limits_S (\nabla \times F) \cdot dA$.

2. Sea γ el triángulo cuyos lados se forman al intersectar el plano $2x + y + 2z = 2$ con los planos XY, YZ y XZ, en el primer octante. Calcule la integral de linea de

$$F = \left(x + y^2, y + z^2, z + x^2\right)$$

   sobre la curva γ orientada en sentido antihorario.

3. Sea S la porción de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ comprendida entre $z = -1$ y $z = 1$. Calcule el valor de

$$\iint\limits_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{c}\, d\sigma$$

   siendo $\vec{n}$ el vector normal unitario apuntando hacia afuera y $\vec{F} = (P, Q, R)$ es un campo de clase C^1 con $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = xz$, $R(x, y, z) = h(z)$.

4. Calcule $\int\limits_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde el campo vectorial $\vec{F}$ está definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, e^{\text{sen}^2(z)}\right) ,$$

   y Γ es la curva parametrizada por $r(t) = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t), \cos^3(t) - \text{sen}^5(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

5. Considere S la porción del plano $x+y+z = 1$ que está dentro del cilindro $x^2+y^2 = 1$ y llamemos C a la curva frontera de S. Calcule el área de S utilizando el Teorema de Stokes.

6. Sea S la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ bajo el plano $z = 4$ orientada de modo tal que el vector normal en $(5, 0, 0)$ es $\mathbf{i}$ y se define el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Utilizando el Teorema de Stokes calcule $\iint\limits_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS$.

7. Una partícula se mueve en $\mathbb{R}^3$ a lo largo del camino cerrado C, compuesto por segmentos de rectas, que empieza en el origen y sigue al punto $P_1 = (1, 0, 0)$, continua al punto $P_2 = (1, 2, 1)$, sigue al punto $P_3 = (0, 2, 1)$ volviendo finalmente al origen; bajo la influencia del campo de vectores $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, 2xy, 4y^2)$. Calcule el trabajo realizado.

8. Calcule, usando el teorema de Stokes, el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + y - z, 2x + z, 2x - y - z)$ al mover una partícula a lo largo de la curva Γ dada por
$$\Gamma \ : \ \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + z^4 = 4 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$
donde la orientación de Γ se escoge de modo que la curva que se obtiene al proyectar Γ sobre el plano $z = 0$ esta orientada positivamente.

9. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas. Si S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, demuestre que
$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS = 0$$
siendo $\mathbf{N}$ la normal unitaria a S apuntando hacia afuera.

10. Calcular $\iint_S \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$ siendo $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, zx, x^2 e^{z^2 y})$ y S la porción del elipsoide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{12} = 1$ fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que las normales apuntan hacia afuera del elipsoide.

11. Utilice el teorema de Stokes para evaluar
$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$
donde $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y \cos(z)\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen}(z)\mathbf{j} + xe^y\mathbf{k}$ y S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$ orientada hacia abajo.

Clases 15: Teorema de la divergencia

1. Calcule el flujo del campo $\vec{F} = (z \arctan(y^2), z^3 \ln(x^2 + 1), z)$ a través de la porción del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está encima del plano $z = 1$, y con la orientación hacia arriba.

2. Calcule el flujo hacia arriba del campo campo $F = (-2zx, z, z^2)$ a través de la porción del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 4$ que está encima del plano $z = 2$.

3. Considere el campo $\vec{F}(x,y,z) = (z\arctan(y^2), z^3\ln(x^2+1), z)$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que se sitúa encima del plano $z=1$ y está orientado hacia arriba.

4. Se define el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+yz, Q(x,y,z), x^2+y^2+2z)$ con Q una función C^1 en $\mathbb{R}^3$ y $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = -1$. Evalúe el flujo

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

donde S es la porción del paraboloide $z = 1-x^2-y^2$ con $z \geqslant 0$ y $\mathbf{n}$ es la normal unitaria apuntando hacia afuera.

5. Sea $\mathcal{B}$ la región en $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{B} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$. Utilice el Teorema de la Divergencia para calcular $\displaystyle\iiint_{\mathcal{B}} z^2 dV$.

6. Sea $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4, 0\leqslant z\leqslant a\}\cup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leqslant 4, z=a\}$ la superficie orientada según los vectores normales apuntando hacia el exterior. Determine los valores de $a\in\mathbb{R}$ de modo que

$$\int_S F\cdot N dS = 10\pi$$

donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2,y^2,z^2)$ y $\mathbf{N}$ la normal unitaria a la superficie apuntando hacia afuera.

7. Sea S el elipsoide de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Calcule

$$\iint_S \left(\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + (x,y,z)\right)\cdot\mathbf{N}\,dS$$

siendo $\mathbf{N}$ la normal unitaria a S apuntando hacia afuera.