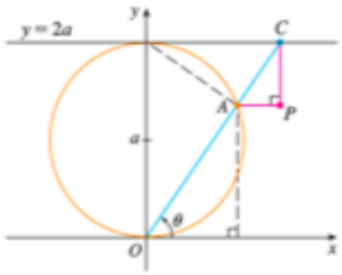
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2020

MAT1630 - Prueba 1

1. La curva de *María Agnesi* consiste en todas las posibles posiciones del punto P, dada la figura.



Encuentre una parametrización de esta curva.

Solución:

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ y la ecuación de la recta es $y = \tan\theta x$. Los puntos donde intersectan son $(0,0)$ y $(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta, 2a\,\mathrm{sen}^2\,\theta)$.

Luego una parametrización es

$$x = \frac{2a}{\tan\theta}$$
$$y = 2a\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

con $0 < \theta < \pi$.

Criterio de Corrección:

- **6 puntos totales**
- Asignar 3 puntos si hay correcto análisis pero no se puedo llegar a una parametrización.

- Asignar 5 puntos si se llega a una parametrización, pero no coloca dominio.

2. *a*) Encuentre una parametrización de la curva intersección de la esfera y cilindro dada por las ecuaciones:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=2, \qquad z<0$$

y

$$x^2+y^2-4x-2y+4=0$$

Solución:

Completando cuadrado en la ecuación del cilindro obtenemos

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1$$

y su parametrización es

$$\begin{aligned} x &= \cos t+2\\ y &= \operatorname{sen} t+1\\ z &= z \end{aligned}$$

y luego reemplazando en la esfera obtenemos

$$(\cos t+1)^2+(\operatorname{sen} t-1)^2+z^2=2$$

Despejando z^2 y desarrollando obtenemos que $z^2=2\operatorname{sen} t-2\cos t-1$. Como $z<0$ obtenemos que para todo t tal que $2\operatorname{sen} t-2\cos t-1>0$ una parametrización de la intersección es

$$\begin{aligned} x &= \cos t+2\\ y &= \operatorname{sen} t+2\\ z &= -\sqrt{2\operatorname{sen} t-2\cos t-1} \end{aligned}$$

Criterio de Corrección:

- **3 puntos totales**
- Descontar 1 punto si parametriza $z>0$ (saca la raíz positiva.)
- Descontar 1 punto si no pone condición parámetro, $2\operatorname{sen} t-2\cos t-1>0$. O condición parámetro bajo otra parametrización.

b) Determine las ecuaciones del plano normal y del plano osculador de la curva

$$\begin{aligned} x &= 2\,\mathrm{sen}(3t) \\ y &= t \\ z &= 2\cos(3t) \end{aligned}$$

en el punto $(0, \pi, -2)$.

Solución:

$r(t) = (2\,\mathrm{sen}\,3t, t, 2\cos 3t)$

$r'(t) = (6\cos 3t, 1, -6\,\mathrm{sen}\,3t)$

$r''(t) = (-18\,\mathrm{sen}\,3t, 0, -18\cos 3t)$

Como $r(\pi) = (0, \pi, -2)$, luego en $t = \pi$ se tiene

$r'(\pi) = (-6, 1, 0)$

$r''(\pi) = (0, 0, 18)$

$r'(\pi) \times r''(\pi) = (18, 108, 0)$

Luego un vector en la dirección de T es $(-6, 1, 0)$, y en la dirección de B es $(1, 6, 0)$.

Así el plano normal en $(0, \pi, -2)$ es

$$-6x + y = \pi$$

Y el plano osculador en $(0, \pi, -2)$ es

$$x + 6y = 6\pi$$

Criterio de Corrección:

- **3 puntos totales.**
- Asignar 0.5 punto por encontrar vector normal al plano normal.
- Asignar 0.5 punto por encontrar vector normal al plano osculador.

- Asignar 1 punto por encontrar el plano normal.
- Asignar 1 punto por encontrar el plano osculador.

3. *a*) La curva en $\mathbb{R}^3$ de parametrización $r(t) = (\sin^2(t), \sin(t)\cos(t), \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, pasa dos veces por el punto $(1, 0, 0)$. Demuestre que las dos tangentes en ese punto son ortogonales y determine las ecuaciones de las rectas tangentes que pasan por él.

Solución:

Se tiene que $r'(t) = (2\,\mathrm{sen}\,t\cos t, \cos^2 t - \mathrm{sen}^2\,t, -\,\mathrm{sen}\,t)$ y que $r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{3\pi}{2}) = (1, 0, 0)$.

Luego $r'(\frac{\pi}{2}) = (0, -1, -1)$ (dirección recta tangente en $(1, 0, 0)$ cuando $t = \frac{\pi}{2}$) y $r'(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1, 1)$ (dirección recta tangente en $(1, 0, 0)$ cuando $t = \frac{3\pi}{2}$). Y como $(0, -1, -1) \cdot (0, -1, -1) = 0$ se concluye que las dos tangentes en ese punto son ortogonales.

Las ecuaciones de sus rectas tangentes son:

$$r_1(t) = (1, 0, 0) + t(0, -1, -1)$$

y

$$r_2(t) = (1, 0, 0) + t(0, -1, 1)$$

Criterio de Corrección:

- **3 puntos en total.**
- Asignar 1 punto por demostrar perpendicular de rectas tangentes en (1,0,0)
- Asignar 1 punto por cada ecuación de la recta.

b) Demuestre que

$$r'(t) \times r''(t) = k(t)(\frac{ds}{dt})^3 B(t)$$

donde r es la función que describe una curva C, $k(t)$ es la función curvatura, $B(t)$ la función que nos da el vector normal y $s(t)$ la función longitud de dicha curva. Explique cada paso.

Solución:

Se tiene que $r'(t) = \frac{ds}{dt}T(t)$. Derivando obtenemos

$$r''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}T(t) + \frac{ds}{dt}T'(t)$$

Luego

$$r'(t)\times r''(t) = \frac{ds}{dt}T(t)\times(\frac{d^2s}{dt^2}T(t)+\frac{ds}{dt}T'(t)) = (\frac{ds}{dt}T(t)\times\frac{d^2s}{dt^2}T(t))+(\frac{ds}{dt}T(t)\times\frac{ds}{dt}T'(t))$$

El primer sumando da cero. Por lo que

$$r'(t) \times r''(t) = \frac{ds}{dt}T(t) \times \frac{ds}{dt}T'(t)$$

De las fórmulas de Frenet-Serret tenemos que $T'(s) = kN$. Y por lo tanto $T'(t) = \frac{ds}{dt}kN$
Por lo que

$$r'(t) \times r''(t) = \frac{ds}{dt}T(t) \times (\frac{ds}{dt})^2 kN$$

$$r'(t) \times r''(t) = (\frac{ds}{dt})^3 k(T(t) \times N)$$

Y como $T(t) \times N = B$, se obtiene lo pedido:

$$r'(t) \times r''(t) = k(t)(\frac{ds}{dt})^3 B(t)$$

Criterio de Corrección:

- **3 puntos en total**
- Ir descontando 0.5 punto si no hay una justificación por paso.

4. Dada la curva polar $r = 1 + \cos\theta$, con parámetro $\theta \in [-\pi, \pi]$.

   a) Parametrice la curva por longitud de arco.

   Solución
   La función longitud de curva es
   $s(\theta) = \int_{\pi}^{\theta} \sqrt{(1+\cos^2 u) + (-\operatorname{sen} u)^3}du$
   Esta pudo haberse encontrado directamente de la fórmula en polares, o se pudo haber hecho el cálculo de la curva escrita en ecuaciones paramétrica

$$x = (1+\cos\theta)(\cos\theta)$$

$$y = (1+\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)$$

   $s(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} \sqrt{(1+\cos^2 u) + (-\operatorname{sen} u)^2}du = 2\int_{-\pi}^{\theta} \cos(\frac{u}{2})du = 4[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + 1]$
   Luego $s^{-1}(s) = \theta(s) = 2\operatorname{arc\,sen}(\frac{s-4}{4})$
   Por lo que la curva parametrizada por longitud de curva es

$$x = (1+\cos(2\operatorname{arc\,sen}(\frac{s-4}{4})))(\cos(2\operatorname{arc\,sen}(\frac{s-4}{4})))$$

$$y = (1+\cos(2\operatorname{arc\,sen}(\frac{s-4}{4})))(\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(\frac{s-4}{4}))$$

   con $0 < s < 8$

   Criterio de Corrección:

   - **3 puntos total**
   - Asignar 1 punto por expresar la función longitud de curva como integra: $s(\theta) = \int_{a}^{\theta} \sqrt{(1+\cos^2 u) + (-\operatorname{sen} u)^3}du$, a constante
   - Asignar 1 punto por cálculo de dicha integral.
   - Asignar 1 punto por reparametrizar la curva.

   b) Encuentre su longitud.

   Sabemos que la longitud de una curva parametrizada por longitud de curva, es la longitud del intervalo dominio, luego es 8.

Tambien pudo haberse calculado directamente de

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\frac{u}{2})du = 8.$$

Criterio de Corrección:

- **3 puntos total**
- Asignar 1 punto si se plantea la integral, pero no se puede calcular.