Integral de línea Campo Vectorial

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_C F \cdot T\, ds$$

Recordar: $\int_C \vec{F}\, dr = -\int_{C^-} \vec{F}\, dr$

$$\int_C \vec{F}\, dr = \int_C P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz$$

Integral de campo vect. escrita por componentes.

Teorema Fundamental de las Integrales de línea.

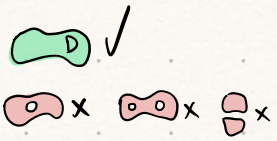
- Si $\vec{F} = \nabla f \Rightarrow \int_C \vec{F}\, dr = \int_C \nabla f\, dr = f(r(b)) - f(r(a))$

Independencia de trayectoria



Si f es derivable y ∇f continua en la curva C suave, la $\int_C F\, dr$ solo depende del punto final e inicial, $\therefore$ usen la parametrización más fácil

Equivalencias para decir campo conservativo

- $\int_C F\,dr$ es indp. de la trayectoria en la región D $\left(\oint_C F\,dr = 0\right)$ ↳  ✓  ✗
- $\text{Rot}\, F = 0$
- $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ } La región debe ser simplemente conexa ↳ 
- $\vec{F} = \nabla f$

Determinar ∇f

① $f_x = P \Rightarrow \int f_x\,dx = \int P\,dx \Rightarrow f(x,y) = \int P\,dx + h(y)$

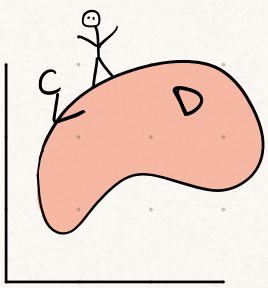
② $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left(\int P\,dx\right)_y + h'(y)$

③ $\left(\int P\,dx\right)_y + h'(y) = f_y = Q$

Teorema de Green ($\mathbb{R}^2$)

- Si la curva C es simple cerrada suave por tramos con orientación positiva y la región D que es delimitada por C tiene $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ continuas

$$\Rightarrow \quad \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

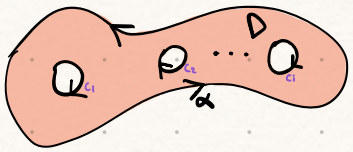


¡Siempre a mi izquierda!

Si nos piden Área de la zona D, elegimos P y Q tal que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 0 \wedge Q = x \\ P = -y \wedge Q = 0 \end{array} \right\}, \quad A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Green con hoyos



$$\oint_{QUC_1UC_2\cdots UC_i} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA$$

$$\Rightarrow \oint_{\alpha} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \cdots + \oint_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA$$

$$\Rightarrow \oint_{\alpha} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA - \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

// Hacer Green // Normalmente Y resto los hoyos

Rotacional y Divergencia

- $\mathrm{ROT}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y \rangle$

  ↳ Si el campo es en $\mathbb{R}^2$, hacer $R=0$

- $\mathrm{ROT}(\nabla f) = 0 \rightarrow$ Si F_x, F_y, F_z continuas y $\mathrm{ROT}(F)=0$, entonces $\vec{F}$ es conservativo

- $\mathrm{DIV}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

- $\text{DIV}(\text{ROT}(F)) = 0$

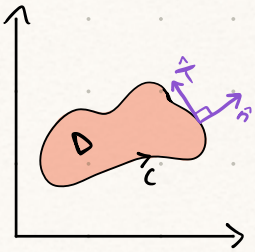
Formas Vectoriales del Teorema de Green

① $F = \langle P, Q \rangle$, $\oint_C \vec{F}\,dr = \oint_C P\,dx + Q\,dy$

Se sabe que $\text{ROT}(F) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_{(x,y)} & Q_{(x,y)} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\hat{k}$

$\Rightarrow \text{ROT}(F) \cdot \hat{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\hat{k}\cdot\hat{k}$ (1)

$\Rightarrow$ $\oint_C \vec{F}\,dr = \iint_D \text{ROT}(F) \cdot \hat{k}\,dA$

② 

* Curva C parametrizada por $r(t)$

$\hat{T} = \frac{r'}{|r'|} = \frac{x'}{|r'|}\hat{i} + \frac{y'}{|r'|}\hat{j}$

$\hat{n} = \frac{y'}{|r'|}\hat{j} - \frac{x'}{|r'|}$

$$\Rightarrow \oint_C \underbrace{F \cdot n}_{\text{Componente Normal de F a la curva C}} ds = \int_a^b (F \cdot n)\{\tau\} |r'(\tau)| d\tau = \int_a^b \left[P(x,y) \cdot \frac{y'}{|r'|} - Q(x,y) \frac{x'}{|r'|} \right] |r'| d\tau$$

$\hookrightarrow X = X(\tau) \wedge Y = Y(\tau)$

$$\Rightarrow \int_a^b P(x,y) \underbrace{y' d\tau}_{\frac{dy}{d\tau} \cdot d\tau} - Q(x,y) x' d\tau = \int_a^b P(x,y) dy - Q(x,y) dx = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} dA$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C F \cdot n \, ds = \iint_D DIV(F) \, dA}$$

ESTO es Conocido Como FLUJO.