Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Segundo Semestre 2023

MAT-1630 - Interrogación 1

1. Considere la curva $\vec{r}(t) = (3e^t \operatorname{sen} t + 7, \sqrt{7}e^t, 3e^t \cos t)$, con $t \in [0, \ln(3)]$.
   Encuentre la curva reparametrizada por longitud de arco.

   Solución: Calculamos

   $$\vec{r}\,'(t) = (3e^t \operatorname{sen} t + 3e^t \cos t, \sqrt{7}e^t, 3e^t \cos t - 3e^t \operatorname{sen} t)$$

   $$||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{9e^{2t}(\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t) + 7e^{2t} + 9e^{2t}(\cos^2 t - 2\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t)} = 5e^t$$

   de donde, fijando la base en el punto inicial $t = 0$ obtenemos

   $$s(t) = \int_0^t ||\vec{r}\,'(\tau)||\, d\tau = \int_0^t 5e^\tau \, d\tau = 5(e^t - 1)$$

   con s variando entre 0 y el largo de la curva $s(\ln(3)) = 10$.
   Invirtiendo obtenemos $t = \ln\left(\frac{s}{5} + 1\right)$, luego, la curva arcoparametrizada es:

   $$\vec{r}(s) = \left(3\left(\frac{s}{5} + 1\right)\operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{s}{5} + 1\right)\right) + 7, \sqrt{7}\left(\frac{s}{5} + 1\right), 3\left(\frac{s}{5} + 1\right)\cos\left(\ln\left(\frac{s}{5} + 1\right)\right)\right)$$

   con $s \in [0, 10]$.

2. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ la curva en el espacio que se obtiene al intersectar la superficie $A = \{(t\cos(\pi t), t\operatorname{sen}(\pi t), z) : t \geq 0, z \geq 0\}$ con la superficie $B = \{(x, y, z) : z = 1 - (x^2 + y^2)/2\}$.

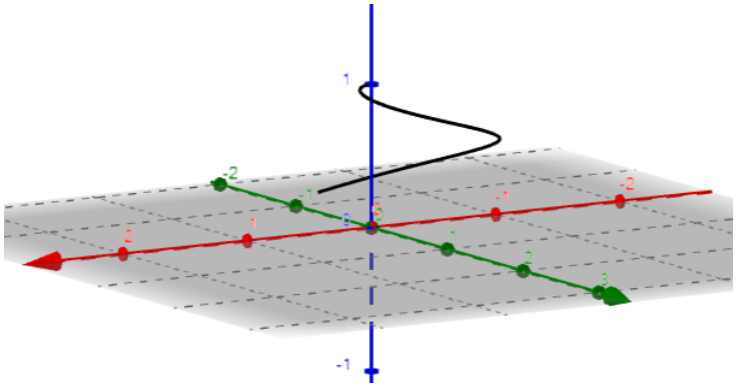
   (a) (1 pto.) Realice un bosquejo de la curva $\mathcal{C}$ (incluyendo los ejes x, y, z).

   (b) (2 ptos.) Encuentre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y una parametrización $r : I \to \mathbb{R}^3$ de la curva $\mathcal{C}$.

   (c) (3 ptos.) Encuentre $p \in \mathbb{R}^3$ el punto de $\mathcal{C}$ que está en el plano de ecuación $z = 7/8$ y encuentre un vector tangente unitario a $\mathcal{C}$ en p.

   Solución

   (a) Es una espiral sobre un paraboloide que se abre hacia abajo.



(b) Queremos encontrar $r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, tal que $r(t) \in A$ y $r(t) \in B$.

La definición de A nos sugiere $x(t) = t\cos(\pi t)$, $y(t) = t\,\mathrm{sen}(\pi t)$.

Para estar en B debemos satisfacer $z(t) = 1-(x(t)^2+y(t)^2)/2 = 1-t^2/2$.

Y finalmente, A nos restringe a $t \geq 0$ y $z \geq 0$, por lo tanto $t \geq 0$ y $1 - t^2/2 \geq 0$, con lo que obtenemos $t \in [0, \sqrt{2}]$.

Es decir, la parametrización de $\mathcal{C}$ es

$$r(t) = (t\cos(\pi t), t\,\mathrm{sen}(\pi t), 1 - t^2/2), t \in [0, \sqrt{2}].$$

(c) La curva $\mathcal{C}$ intersecta el plano $z = 7/8$ cuando $1 - t^2/2 = 7/8$, es decir para $t = 1/2$. Luego $p = r(1/2) = (0, 1/2, 7/8)$. Para calcular el vector tangente unitario, calculamos

$$r'(t) = (\cos(\pi t) - \pi t\,\mathrm{sen}(\pi t), \mathrm{sen}(\pi t) + \pi t\cos(\pi t), -t),$$

luego

$$\begin{aligned} r'(1/2) =& (-\pi/2, 1, -1/2), \\ \|r'(1/2)\| =& \sqrt{(\pi/2)^2 + 1 + (1/2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5+\pi^2}, \end{aligned}$$

y concluimos que $T(1/2) = \dfrac{1}{\sqrt{5+\pi^2}}(-\pi, 2, -1)$.

3. Considere la curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $r(t) = (t, t^2/2, t^3/3), t \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $r'(t), r''(t)$ y $r'''(t)$.

(b) Calcule $r'(t) \times r''(t)$ y $(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t)$.

(c) Calcule la curvatura y torsión de la curva en el punto $r(1)$.

Solución.

(a) Derivando obtenemos directamente

$$\begin{aligned} r'(t) =& (1, t, t^2), \\ r''(t) =& (0, 1, 2t), \\ r'''(t) =& (0, 0, 2). \end{aligned}$$

(b) De las definiciones de producto cruz y producto punto

$$\begin{aligned} r'(t) \times r''(t) &= (2t^2 - t^2, 0 - 2t, 1 - 0) = (t^2, -2t, 1), \\ (r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t) &= (t^2, -2t, 1) \cdot (0, 0, 2) = 2. \end{aligned}$$

(c) Recordamos las formulas de curvatra y torsión

$$\begin{aligned} \kappa(t) =& \|r'(t) \times r''(t)\|/\|r'(t)\|^3, \\ \tau(t) =& (r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t)/\|r'(t) \times r''(t)\|^2, \end{aligned}$$

y calculamos

$$\|r'(t)\| = \sqrt{1+t^2+t^4},$$
$$\|r'(1)\| = \sqrt{3},$$

$$\|r'(t) \times r''(t)\| = \sqrt{1+4t^2+t^4},$$
$$\|r'(1) \times r''(1)\| = \sqrt{6},$$

$$(r'(1) \times r''(1)) \cdot r'''(1) = 2.$$

Concluimos

$$\kappa(1) = \sqrt{6}/(\sqrt{3})^3 = \sqrt{2}/3,$$
$$\tau(1) = 2/6 = 1/3.$$

4. Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva arcoparametrizada con curvatura $\kappa = \kappa(s) > 0$ y torsión $\tau = \tau(s)$, y triedro móvil $T(s), N(s), B(s)$. Se sabe que la curva está contenida en la superficie de la esfera de radio 2 centrada en el origen.

   Demuestre que satisface la ecuación $\gamma(s) = \frac{-1}{\kappa}N + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}B$.

   [Hint: Recuerde que la esfera está dada por $\vec{x} \cdot \vec{x} = 4$.]

   Solución: Como la curva está en la esfera, debe satisfacer su ecuación por lo que $\gamma(s) \cdot \gamma(s) = 4$, derivando obtenemos

$$2\gamma' \cdot \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad T \cdot \gamma = 0$$

   derivando nuevamente obtenemos

$$T' \cdot \gamma + T \cdot \gamma' = 0$$

$$\kappa N \cdot \gamma + T \cdot T = 0$$
$$N \cdot \gamma = -1/\kappa$$

   y derivando $-1 = \kappa N \cdot \gamma$ obtenemos

$$0 = \kappa' N \cdot \gamma + \kappa N' \cdot \gamma + \kappa N \cdot \gamma' = \kappa'(-1/\kappa) + \kappa(-\kappa T + \tau B) \cdot \gamma + \kappa N \cdot T = 0$$

$$-\kappa^2 T \cdot \gamma + \kappa\tau B \cdot \gamma = \kappa'/\kappa \quad \Rightarrow \quad B \cdot \gamma = \kappa'/\kappa^2\tau.$$

   Como T, N, B forman una base ortonormal,

$$\gamma = (\gamma \cdot T)T + (\gamma \cdot N)N + (\gamma \cdot B)B = \frac{-1}{\kappa}N + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}B.$$